Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 10

Aufgabe 1
Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([0,1]) \subset [0,1]$. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. es existiert ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Hinweis. Wenden Sie den Nullstellensatz auf eine geeignete Hilfsfunktion an.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sind durch

$$\sinh(x) := \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$
$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) sinh ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.

(b) cosh ist auf $D = \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf das Intervall $[1, \infty)$ ab.

(c) Für die Umkehrfunktionen

$$\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{Arcosh}\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$$

gilt

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$\operatorname{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

Insbesondere sind diese Funktionen stetig.

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 3
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ gleichmäßig stetig.

(b) Die Parabel $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $x \mapsto x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 30.06.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128