Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
Blatt 11

Aufgabe 1
Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Funktionalgleichung
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
erfüllen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie (sofern existent) die folgenden Limites.

(a) $\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x^{-x}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch
$$x_n := 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$$
gegen $\ln(a)$ konvergiert.

Hinweis. Verwenden Sie die bekannte Identität $\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

(2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es genau zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 gibt, die die Gleichung
$$z^2 = a$$
lösen. Geben Sie z_1 und z_2 in Abhängigkeit von α und β an.

(3 Punkte)

Aufgabe 5
Beweisen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die Ungleichungskette
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|\,.$$
Wann gilt links bzw. rechts die Gleichheit?

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 07.07.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128