Universität Bielefeld
C. Huck **Sommersemester 2018**

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Weitere Klausurübungen

Aufgabe 1
Sei V ein K-Vektorraum und sei M eine Teilmenge von V. Was ist der kleinste Teilraum U von V, der M enthält? Wie sieht U im Fall einer endlichen Menge $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus?

Aufgabe 2
Sei V ein K-Vektorraum. Gibt es Teilräume U von V, deren Komplement $V \setminus U$ ebenfalls ein Teilraum ist?

Aufgabe 3
Beschreiben Sie die Teilräume des $\mathbb{R}^3$? Welche Dimensionen haben diese Teilräume?

Aufgabe 4
Sei V ein K-Vektorraum und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig. Ist M automatisch eine Basis von V? Falls nein, ist M Basis eines geeigneten Teilraums von V?

Aufgabe 5
Sei V ein K-Vektorraum und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Ist M automatisch eine Basis von V? Falls nein, ist M Basis eines geeigneten Teilraums von V?

Aufgabe 6
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Ist M automatisch eine Basis von V?

Aufgabe 7
Sei U ein dreidimensionaler und sei U' ein vierdimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^5$. Ist es möglich, dass der Schnitt $U \cap U'$ eindimensional ist?

Aufgabe 8
Gibt es lineare Abbildungen $f\colon V \to V$ eines K-Vektorraums V in sich selbst, die surjektiv, aber nicht injektiv sind? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an.

Aufgabe 9
Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Vektors $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ einmal bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ und einmal bezüglich der Basis $(e_1 + e_2, e_2, -2e_3)$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 10
Wie überprüft man in der Praxis, ob eine lineare Abbildung $A\colon\ K^n \to K^m$ surjektiv bzw. injektiv ist?

Aufgabe 11
Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. V sei endlich-dimensional. Ist es möglich, dass $\dim(\operatorname{Bild} f) > \dim(V)$ gilt? Falls nein, wann sind die beiden Dimensionen gleich?

Aufgabe 12
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit geordneter Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Sei $f\colon V \to V$ die lineare Fortsetzung von $f(b_i) = b_{n-i+1}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix von f bzgl. B.

Aufgabe 13
Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines n-dimensionalen K-Vektorraums V habe bezüglich der geordneten Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ die Einheitsmatrix als Koordinatenmatrix. Was bedeutet das für die $f(b_i)$?

Aufgabe 14
Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V und sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V mit $f(b_i) = b_{i+1}$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$ und $f(b_n) = 0$. Wie sieht die Koordinatenmatrix von f bezüglich B aus? Zeigen Sie, dass f^n der Nullendomorphismus ist, d.h. $f^n(v) = 0$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 15
Ist die Drehung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn mit Drehwinkel $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ eine lineare Abbildung? Falls ja, bestimmen Sie die Koordinatenmatrix bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$. Was ist also allgemein $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$?

Aufgabe 16
Ist die Geradenspiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Ursprungsgeraden G_α durch den Punkt $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, wobei $0 \leqslant \alpha < \pi$, eine lineare Abbildung? Falls ja, bestimmen Sie die Koordinatenmatrix bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$. Was ist also allgemein $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$?