Universität Bielefeld
C. Huck

Bielefeld, 10.07.2018

Probeklausur zur Linearen Algebra I

Sommersemester 2018

Allgemeine Hinweise:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und packen Sie es weg.
- Tragen Sie unten zuerst Namen, TutorIn und Matrikelnummer ein.
- Es sind insgesamt XX Punkte und X Zusatzpunkte erreichbar. Zum Bestehen der Klausur sind XX Punkte erforderlich.
- Lösen Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (inkl. Rückseiten). Benutzen Sie, wenn notwendig, die anhängenden Zusatzblätter. (Mit klarer Zuordnung zu den Aufgaben!)
- Begründen Sie die Lösungen! Es werden keine Punkte für bloße Ergebnisse vergeben.
- **Verwenden Sie die Hinweise, sofern vorhanden!**
- Eine Lösung pro Aufgabe! Streichen Sie ungültige Lösungsversuche durch.

Name: ....

TutorIn: ....

Matrikel-Nr.: ....

1	2	3	4	5	6	7	8

$\sum$	

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{5} & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

sowie ihrer Inversen A^{-1} (sofern existent).

Aufgabe 2

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} und lösen Sie $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \right\} \text{ und } V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie Basen von U, V und $U + V$ sowie $U \cap V$.

Aufgabe 4
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und sei

$$v := \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n\,,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ fix sind mit $\lambda_1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\{v, b_2, \ldots, b_n\}$ ebenfalls eine Basis von V ist.

Aufgabe 5

Sei p eine Primzahl und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Basen von V.

Hinweis. Zu welchem Standardraum ist V isomorph und wieviel Elemente hat dieser? Wie konstruiert man sukzessive eine geordnete Basis?

Aufgabe 6
Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild für die lineare Abbildung $f\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5, x_1 + x_3 + x_5)\,.$$

Bestimmen Sie außerdem die Koordinatenmatrix bzgl. der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^5$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der sog. *Dualraum* von V. Für einen Teilraum $W \subset V$ sei

$$W^\circ := \{f \in V^* \mid W \subset \mathrm{Kern}(f)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass W° ein Teilraum von V^* ist mit

$$\dim(W) + \dim(W^\circ) = n\,.$$

Hinweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ (wie in den Übungen definiert) eine Basis von V^*. Wählen Sie die Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ auf geschickte Weise.

Aufgabe 8

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei W ein K-Vektorraum. Wann gilt für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, dass $\mathrm{Rang}(f) = n$?