Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie, dass E eine Basis von V ist.

Aufgabe 3 (Austauschlemma)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, sodass $(B \setminus \{b_i\}) \cup \{v\}$ erneut eine Basis von V ist.

Hinweis. Allgemeiner gilt: Für jede linear unabhängige Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ (notwendigerweise ist dann $k \leq n$) existieren paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass

$$\big(B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}\big) \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$$

eine Basis von V ist. Können Sie das auch beweisen?