Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1
Wir betrachten den Körper $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 4. Bekanntlich ist K auch ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Sei m_α der zu einem fixierten $\alpha = c + d\sqrt{2}$ gehörige Endomorphismus von K, gegeben durch $x \mapsto \alpha x$. Berechnen Sie Spur und Determinante von m_α.

Hinweis. Kennen Sie eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

Aufgabe 2
Sei K ein Körper und sei die formale Derivation $D\colon K[X] \to K[X]$ gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1}\,.$$

Zeigen Sie, dass D linear ist und beweisen Sie damit die formale Produktregel

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)\,.$$

Was sind $\mathrm{Kern}(D)$ und $\mathrm{Bild}(D)$? Bestimmen Sie allgemein $\mathrm{Kern}(D^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
Beweisen Sie die Formel für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix (als das Produkt der Diagonalelemente) elementar, also *ohne* den Enwicklungssatz.