

Übungen zur Vorlesung  
Lineare Algebra I

Blatt 6

**Aufgabe 1**

Seien  $U, W$  Teilräume eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i)  $U$  ist komplementärer Teilraum von  $W$  in  $V$  (in Zeichen:  $V = U \oplus W$ ).
- (ii) Zu jedem Vektor  $v \in V$  gibt es eindeutig bestimmte  $u \in U$  und  $w \in W$  mit

$$v = u + w.$$

- (iii) Es gilt  $V = U + W$  und aus  $u + w = 0$  mit  $u \in U$  und  $w \in W$  folgt stets

$$u = w = 0.$$

- (iv) Es gelten  $V = U + W$  und  $\dim(U \cap W) = 0$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 2**

Es seien  $U$  der von den linear unabhängigen Vektoren  $(1, 0, 2, -1)$ ,  $(0, 1, 3, 1)$  und  $W$  der von den linear unabhängigen Vektoren  $(1, 1, -1, 2)$ ,  $(0, 1, 9, -1)$  erzeugte Teilraum des  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Dimensionsformel für die Summe  $U + W$ .
- (b) Finden Sie zu  $U$  komplementäre Teilräume  $T_1$  und  $T_2$ , die selbst zueinander komplementär sind.

*Hinweis.* Verwenden Sie Ihre Ergebnisse von Übungsblatt 5, Aufgabe 2.

(2+2 Punkte)

**Aufgabe 3**

- (a) Bestimmen Sie den Rang des Systems  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- (b) Bestimmen Sie den Rang des Systems  $(u_1, u_2, u_3)$  für

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

**(2+2 Punkte)**

**Aufgabe 4**

Es sei  $U$  ein 3-dimensionaler Teilraum des  $\mathbb{R}^6$  und  $W$  ein 5-dimensionaler Teilraum des  $\mathbb{R}^6$ . Zeigen Sie, dass  $\dim(U \cap W) \geq 2$  gilt und geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Gleichheit  $\dim(U \cap W) = 2$  realisiert wird.

**(2+2 Punkte)**

**Abgabe bis Donnerstag, 24.05.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**