**Universität Bielefeld** **Sommersemester 2018**
**C. Huck**

## Übungen zur Vorlesung

# Lineare Algebra I

## Blatt 8

**Aufgabe 1**
Es seien $U$ der von den Vektoren $(1, 2, 2, -1, 1, 1)$, $(2, 1, 3, 1, 1, 1)$ und $W$ der von den Vektoren $(1, -1, 1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 9, -1, 1, 1)$ , $(3, -2, 12, 5, 1, 1)$ erzeugte Teilraum des $\mathbb{R}^6$. Bestimmen Sie Basen von $U$, $W$, $U + W$ und $U \cap W$.

**(1+1+2 Punkte + 4 Zusatzpunkte)**

**Aufgabe 2**
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 \cdot x_2)$.

(b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cos(\varphi) - x_2 \sin(\varphi), x_1 \sin(\varphi) + x_2 \cos(\varphi))$ für ein festes $\varphi \in \mathbb{R}$.

(c) $K^{(\mathbb{N})} \to K^{(\mathbb{N})}$, $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$.

(d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (a, x)$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$.

**(1+1+1+1 Punkte)**

**Aufgabe 3**
Seien $V$ und $W$ $K$-Vektorräume und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $V$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $f$ injektiv $\iff \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ linear unabhängig.

(b) $f$ surjektiv $\iff \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ Erzeugendensystem von $W$.

(c) $f$ Isomorphismus $\iff \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ Basis von $W$.

**(2+1+1 Punkte)**

**Aufgabe 4**
Für ein festes $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $f_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die gegeben ist durch

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_a$ eine lineare Abbildung ist. Zeigen Sie weiter, dass alle linearen Abbildungen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von der Form $f_a$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}^n$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_a(x) = 0\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist und bestimmen Sie die Dimension von $H$ in Abhängigkeit von $a$.

**(2+2 Punkte)**

**Abgabe bis Donnerstag, 07.06.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**