Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass es keine surjektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und keine injektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ gibt.

(b) Sei $0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \to 0$ eine *kurze exakte Sequenz* von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen, d.h.

(i) V_1, V_2 und V_3 sind endlich-dimensional.

(ii) f und g sind lineare Abbildungen.

(iii) f ist injektiv, g ist surjektiv und es gilt $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Bild}(f)$.

Zeigen Sie, dass gilt: $\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 = 0$.

Hinweis. Verwenden Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach K ($K = K^1$ wird betrachtet als eindimensionaler K-Vektorraum). Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Zu jedem b_i gibt es genau ein Element $b_i^* \in V^*$ mit $b_i^*(b_i) = 1$ und $b_i^*(b_j) = 0$ für alle $j \neq i$.

(b) Die durch Teil (a) definierte Menge $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ ist eine Basis von V^* und für jedes $f \in V^*$ gilt $f = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*$.

(1+3 Punkte)

Aufgabe 3

Es bezeichne (e_1, e_2) die kanonische geordneten Basis von K^2 und (f_1, f_2, f_3, f_4) die kanonische geordnete Basis von K^4. Betrachten Sie die lineare Fortsetzung $f\colon K^2 \to K^4$ von $e_1 \mapsto f_1 - f_2$, $e_2 \mapsto f_2 + f_4$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix von f bzgl.

(a) der kanonischen geordneten Basen $B = (e_1, e_2)$ von K^2 und $C = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ von K^4.

(b) der geordneten Basen $B = (e_1 - e_2, e_2)$ von K^2 und $C = (f_1 + f_2, f_1, f_3 - f_4, f_3 + f_4)$ von K^4.

(c) der geordneten kanonischen Basis $B = (e_1, e_2)$ von K^2 und der geordneten Basis $C = (f_1 - f_2, -f_2 - f_4, f_3 + f_4, f_3 + 2f_4)$ von K^4.

Bestimmen Sie zusätzlich die Dimensionen von Kern f und Bild f und geben Sie jeweils explizit Basen an.

(1+3+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 14.06.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128