Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
Blatt 12

Aufgabe 1
Sei $n \geq 2$ und sei $d_n \colon (K^n)^n \to K$ eine Determinantenfunktion. Sei weiter $\varphi \colon K^{n-1} \to K^n$ gegeben durch $\varphi((x_1, \ldots, x_{n-1})) := (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Zeigen Sie, dass dann für $1 \leq j \leq n$ die Abbildung $d^{(j)} \colon (K^{n-1})^{n-1} \to K$, definiert durch

$$d^{(j)}(u_1, \ldots, u_{n-1}) := (-1)^{n-j} d_n(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_{j-1}), e_n, \varphi(u_j), \ldots, \varphi(u_{n-1})),$$

eine Determinantenfunktion ist.

Hinweis. Nachweis der definierenden Eigenschaften (i)–(iii).

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Seien $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times l}(K)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Rang}(AB) \leq \mathrm{Rang}(B).$$

Hinweis. Sind $v_1, \ldots, v_l$ die Spalten von B, so sind $Av_1, \ldots, Av_l$ die Spalten von AB.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1} sowie $\det(A)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Determinanten der $n \times n$-Elementarmatrizen $T_{ij}(a)$ (wobei $i \neq j$), $D_i(a)$ und Q_{ij} (wobei $i \neq j$).

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($n \geq 1$) und sei f ein Endomorphismus von V mit $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine Basis von V so existiert, dass f bzgl. dieser Basis eine Koordinatenmatrix $A = (a_{ij})$ besitzt mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$.

Hinweis. Beweis durch vollständige Induktion nach $n = \dim V \geq 1$. Betrachten Sie im Induktionsschritt das kleinste m mit $f^m = 0$. Es ist dann $m \geq 1$ (Warum?) und

$$\mathrm{Kern}(f^{m-1}) \subsetneq \mathrm{Kern}(f^m) = V\,.$$

Versuchen Sie nun, die Induktionsvoraussetzung auf $U := \mathrm{Kern}(f^{m-1})$ anzuwenden.

(6 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 05.07.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128