Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Klausurübungen

Aufgabe 1

(a) Definieren Sie die Begriffe Umgebung und Offenheit für metrische Räume.

(b) Zeigen Sie, dass Schnitte offener Mengen in metrischen Räumen i. Allg. nicht offen sind.

(c) Definieren Sie den Begriff der Kompaktheit für metrische Räume.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, -t)\,.$$

Aufgabe 3

(a) Wann heißt eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) total differenzierbar?

(b) Beweisen Sie, dass total differenzierbare Funktionen stetig sind.

(c) Beweisen Sie, dass total differenzierbare Funktionen partiell differenzierbar sind.

(d) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar?

Aufgabe 4

(a) Wie lautet das hinreichende Kriterium zur Bestimmung isolierter lokaler Extrema von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$?

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,.$$

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = xy^2$, unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 3$ durch Anwendung des Satzes über Langrange-Multiplikatoren.

Aufgabe 5

(a) Wie lautet die allgemeine Taylorsche Formel im $\mathbb{R}^n$? Erläutern Sie auch die Bedeutung der auftauchenden Zeichen (Multiindexschreibweise).

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$ im Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 6

(a) Formulieren Sie den Satz über lokale inverse Funktionen.

(b) Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen.

(c) Formulieren Sie den Mittelwertsatz für C^1-Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen).

Aufgabe 7

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $\dot{x} = t \cos(t^2)x$, $x(0) = 2$.

(b) $\dot{x} = x^2 + 1$, $x(0) = 2$.