Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 6

Aufgabe 1
Seien X und Y metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Für eine Teilmenge $M \subset X$ ist auch die Einschränkung $f\colon M \to Y$ stetig.

(b) Für eine Teilmenge $N \subset Y$ mit $f(X) \subset N$ ist auch die (Co-)Einschränkung $f\colon X \to N$ stetig.

(c) Ist X wegzusammenhängend, so ist auch das Bild $f(X)$ wegzusammenhängend.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2 (Fortsetzung von Blatt 5, Aufgabe 2)
Wir betrachten die Menge $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0 \text{ mit } x > y\}$ als metrischen Raum bezüglich der von der Euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik d auf X. Entscheiden Sie diesmal, ob die folgenden Teilmengen von X zusammenhängend sind.

(a) $M_1 = X$.

(b) $M_2 = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$.

(c) $M_3 = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$.

(d) $M_4 = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

(e) $M_5 = \{(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2\}$.

(1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit $\cap_{i\in I} U_i \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass dann die Vereinigungsmenge $\cup_{i\in I} U_i$ zusammenhängend ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Hinweis. Betrachten Sie (für die nicht-triviale Richtung) für $x \in X$ die Menge X_x der mit x durch eine stetige Kurve in X verbindbaren Punkte $y \in X$. Zeigen Sie, dass X_x eine nicht-leere offene Menge ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5
Sei $n > 0$. Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum (X, d) genau dann zusammenhängend ist, wenn die konstanten Abbildungen die einzigen stetigen Abbildungen $f\colon\ X \to \mathbb{R}^n$ mit endlichem Bild $f(X)$ sind.

(2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 24.11.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128