## Übungen zur Vorlesung
# Analysis II
## Blatt 8

**Aufgabe 1**
Die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & ,\ \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ zweimal partiell differenzierbar ist mit

$$D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)\,.$$

In welchen Punkten ist $f$ zweimal stetig partiell differenzierbar?

(b) Skizzieren Sie die Funktion $V(x,y)$, gegeben durch

$$V(x,y) = \frac{1}{xy}\left[f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)\right]\,,$$

mit Definitionsbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$. Wo geht der Beweis des Vertauschungssatzes (Abschnitt 3, Satz 4) schief?

*Hinweis.* Teil (b): Verwenden Sie Polarkoordinaten.

**(4+3 Punkte)**

**Aufgabe 2 (Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder)**
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für ein partiell differenzierbares *Vektorfeld* $v = (v_1, v_2)\colon\ U \to \mathbb{R}^2$ definiert man die *Rotation* $\operatorname{rot} v\colon\ U \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{rot} v = D_1 v_2 - D_2 v_1\,.$$

Zeigen Sie, dass für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0\,.$$

**(2 Punkte)**

**Aufgabe 3 (Integrabilitätsbedingung $\mathbf{rot\, v = 0}$ nicht hinreichend)**
Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und sei $v\colon\ U \to \mathbb{R}^2$ das unendlich oft stetig (partiell) differenzierbare Vektorfeld, gegeben durch

$$v(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\,.$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld.

(b) Zeigen Sie, dass gilt $\operatorname{rot} v = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine partiell differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\operatorname{grad} f = v\,.$$

Das Vektorfeld $v$ ist also nicht *integrabel*.

(d) Zeigen Sie, dass auf $U' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ die Funktion $f\colon U' \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = \arg(x+iy)\,,$$

partiell differenzierbar ist mit

$$\operatorname{grad} f = v\,.$$

*Hinweis.* Teil (c): Umlaufen Sie den Nullpunkt auf dem Einheitskreis. Teil (d): Das Argument $\arg(x+iy)$ ist für $x+iy \neq 0$ die eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x+iy = \sqrt{x^2+y^2}e^{i\varphi}$ (Polarkoordinaten).

**(2+2+2+3 Punkte)**

**Abgabe bis Freitag, 08.12.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**