Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 9

Aufgabe 1

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Ball und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion mit $\|Df(x)\| \leq K$ für alle $x \in U$, wobei $K \geq 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante K ist.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, offen und zusammenhängend und sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis. Teil (a): Ähnlich wie Folgerung aus dem Mittelwertsatz in der Vorlesung. Teil (b): Mit Teil (a) zeigt man, dass f auf jedem offenen Ball $B(x,\delta) \subset U$ konstant (gleich $f(x)$) ist.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) := \sin(\|f(x)\|^2)$$

ebenfalls C^1 ist und bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} g$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden C^∞-Abbildungen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto 4x^2y + e^{x^2z} - z^3$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (\cosh(xy), xy^2, \ln(1+y^2))$.

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (\ln(1+x^2+y^2), x^2+y^2-z^2, \cos(yz))$.

(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x \sin y \cos z, z \sin x \cos y, z \cos x)$.

Hinweis. Eine Funktion f heißt C^∞, falls f beliebig oft stetig differenzierbar ist (f ist C^k für alle $k \geq 0$).

(2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Taylorpolynome im Ursprung vom Grad eins, zwei und drei für die folgenden C^∞-Abbildungen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 1 + y + x^2 + xy + y^4$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Ax\rangle$, wobei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix ist.

(2+3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 15.12.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128