Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 13 (Letztes Übungsblatt)

Aufgabe 1
Skizzieren Sie das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x,y) = \left(1, \frac{x}{y}\right),$$

und bestimmen Sie die globale Lösung $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der zugehörigen autonomen DGL

$$\dot{\alpha}(t) = f(\alpha(t))$$

mit $\alpha(0) = (0, a)$, wobei $a > 0$.

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass die Lösungskurve α die Form $\alpha(t) = (t, \varphi(t))$ hat, wobei φ dann eine Lösung der nicht-autonomen DGL

$$\dot{x} = \frac{t}{x}$$

mit Anfangsbedingung $\varphi(0) = a$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die DGL

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

vermöge der Transformation $y := \frac{x}{t}$ zur DGL mit getrennten Variablen

$$\dot{y} = (f(y) - y)/t$$

äquivalent ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\dot{x} = (x^2 + tx + t^2)/t^2\,,$$

d.h. die Lösungen durch einen beliebigen Punkt (t_0, x_0) des Definitionsbereiches $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *Integral* der zugehörigen autonomen DGL $\dot{x} = f(x)$, wenn für jede Lösung α die Komposition $\Phi \circ \alpha$ konstant. Nehmen wir an, dass f und Φ C^1-Funktionen sind. Zeigen Sie, dass Φ genau dann ein Integral von f ist, wenn

$$\langle f(x), \operatorname{grad} \Phi(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in U$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 5
Verwenden Sie das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf, um eine Lösung der skalaren DGL

$$\dot{x} = x - t$$

mit den Anfangsbedingungen a) $x(0) = 1$, b) $x(0) = 0$ zu konstruieren.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 26.01.2018, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128