Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Wir betrachten die Transpositionsabbildung $.^t\colon \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^t, V^t)$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $.^t$ ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

(b) Für alle $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gilt
$$\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f^t)\,.$$

Hinweis. Teil (b) beweist erneut, dass für eine Matrix stets gilt Zeilenrang = Spaltenrang.

Aufgabe 2
Betrachten Sie den Teilraum

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 2\\3\\1\\4\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\5\\1\\-1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\0\\1\\1\\-2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^5$ und bestimmen Sie eine Basis des Annulators $U^\circ \subset (\mathbb{R}^5)^t$ von U.

Hinweis. Welches homogene lineare Gleichungssystem ist hier zu lösen?

Aufgabe 3
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei weiter $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset W$ ein Teilraum. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f^t(U^\circ) = (f^{-1}(U))^\circ\,,$$

wobei $f^{-1}(U) := \{v \in V \mid f(v) \in U\}$ das Urbild von U bzgl. f ist.