Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 12

Wie in der Vorlesung sei stets $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Aufgabe 1
Sei (V, q) ein quadratischer Raum. Zeigen Sie, das $SO(V, q)$ eine Untergruppe von $O(V, q)$ ist.

Aufgabe 2
Sei (V, q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum und sei $s \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Sei weiter B eine Orthonormalbasis von (V, q). Zeigen Sie, dass s genau dann eine Isometrie von (V, q) ist, wenn die Koordinatenmatrix von s bezüglich B eine orthogonale Matrix ist.

Aufgabe 3
Sei (V, q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass q genau dann positiv definit ist, wenn gilt

$$q \simeq [1, \dots, 1]$$

(bzw.

$$q \simeq [a_1, \dots, a_n]$$

mit reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$).

Aufgabe 4
Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Es gebe eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts, die aus lauter Eigenvektoren von A besteht (tatsächlich ist das immer der Fall!). Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie, dass die von A vermittelte quadratische Form q_A genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn sämtliche Eigenwerte positiv (nicht-negativ) sind (analog für negativ (semi-)definit). Zeigen Sie weiter, dass q_A genau dann indefinit ist, wenn es positive und negative Eigenwerte gibt.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C([0, 1])$ der stetigen reellwertigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ durch

$$q(f) \ := \int_0^1 f^2(x)dx$$

eine positiv definite quadratische Form gegeben ist. Wie lautet die Fortsetzung von q zu einer symmetrischen Bilinearform auf V explizit?