Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1
Sei

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})\,.$$

Zeigen Sie, dass A trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie ein $S \in GL_4(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS = U$ eine obere Dreicksmatrix ist. Wie sieht U explizit aus? Bestimmen sie auch das Minimalpolynom von A.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und seien $f : U \to V$ und $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es existiert genau dann eine lineare Abbildung $h \colon V \to W$ mit $g = h \circ f$, wenn

$$\mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Kern}(g)\,.$$

Man sagt dann, dass g *über f faktorisiert*.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien M_1, M_2 Teilräume von V und F_1, F_2 Teilräume von V^t. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$.

(b) $(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$.

(c) $(M_1 \cap M_2)^\circ = M_1^\circ + M_2^\circ$.

(d) $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.

(1+1+2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und sei $h \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für h und seine transponierte lineare Abbildung $h^t \colon W^t \to V^t$ gilt:

(a) $\mathrm{Bild}(h^t) = \mathrm{Kern}(h)^\circ$.

(b) h ist injektiv genau dann, wenn h^t surjektiv ist.

Hinweis. Teil (a): Verwenden Sie Aufgabe 2.

(2+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 02.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128