Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1
Sei $\beta\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\beta\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_1\,.$$

und sei $G := \{S \in M_3(\mathbb{R}) \mid \beta(Sx, Sy) = \beta(x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^3\}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) β ist eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$.

(b) G ist eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$, und es gilt $G = \{S \in M_3(\mathbb{R}) \mid S^tBS = B\}$ mit

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 0\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}\,.$$

(c) Es gilt $\det S = \pm 1$ für alle $S \in G$.

Hinweis. Um zu zeigen, dass G eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$ ist, ist zu zeigen, dass $\mathbb{1}_3 \in G$ und dass mit beliebigen $S, T \in G$ auch das Inverse S^{-1} und das Produkt ST in G enthalten sind.

(3+2+1 Punkte)

Aufgabe 2
Es sei β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf einem 2-dimensionalen K-Vektorraum V und es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in V$ (d.h. β ist symplektisch).

(ii) Es gilt $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$ (d.h. β ist schiefsymmetrisch).

(iii) Es gibt eine Basis von V, bzgl. der $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ die Strukturmatrix von β ist.

Hinweis. Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$: Betrachten Sie $\beta(x + y, x + y)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \geq 1$ und es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Sei A (bzw. S) die Menge aller schiefsymmetrischen (bzw. symmetrischen) Bilinearformen auf V.

(a) Zeigen Sie, dass A und S Teilräume von $\mathrm{Bil}(V, V)$ sind.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Bil}(V, V)$, A und S.

(c) Zeigen Sie, dass S ein Komplementärraum zu A in $\mathrm{Bil}(V, V)$ ist.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 06.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128