Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/2019**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Blatt 15 (Ohne Wertung)

Aufgabe 1
Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Koordinatenmatrix A bezüglich einer Orthonormalbasis $(b_1, \dots, b_n)$ von V. Zeigen Sie, dass dann A^* die Koordinatenmatrix von f^* bezüglich dieser Orthonormalbasis ist.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass unter den obigen Voraussetzungen in Identitäten der Form $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ notwendig $\lambda_k = \langle v, b_k \rangle$ gilt.

Aufgabe 2
Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für $f \in \mathrm{End}(V)$ äquivalent sind:

(i) f ist normal.

(ii) Für jeden Teilraum U von V mit $f(U) \subset U$ gilt $f^*(U) \subset U$.

(iii) Für jeden Teilraum U von V mit $f(U) \subset U$ gilt $f(U^\perp) \subset U^\perp$.

(iv) V ist die orthogonale Summe der Eigenräume von f.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für einen Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V äquivalent sind:

(i) f ist unitär und selbstadjungiert.

(ii) f ist normal und es gilt $f^2 = id_V$.

Aufgabe 4
Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass gilt: Ist f normal und nilpotent, so ist $f = 0$.

Aufgabe 5
Geben Sie eine unitäre Diagonalisierung der hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ i & 1 & -i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

an, bestimmen Sie also eine unitäre Matrix $S \in U(3, \mathbb{C})$ mit $S^*AS = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch D explizit an.

Aufgabe 6
Geben Sie eine unitäre Diagonalisierung der unitären Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in U(3, \mathbb{C})$$

an, bestimmen Sie also eine unitäre Matrix $S \in U(3, \mathbb{C})$ mit $S^* A S = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch D explizit an.