Wichtige Resultate aus der Funktionentheorie

Peter Zeiner

16. Mai 2013

Definition 1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f : U \to \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \tag{1}$$

existiert. Ist f in ganz U differenzierbar, so heißt f analytisch bzw. holomorph. Ist f in ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, so heißt f ganz.

Bemerkung 1. Differenzierbarkeit ist im Komplexen eine sehr starke Eigenschaft. Gleichung (1) impliziert, dass der Grenzwert von der Richtung unabhängig ist, insbesondere gilt

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}. \tag{2}$$

Zerlegen wir f nun in Real- und Imaginärteil, schreiben also $f = u + iv$ und $z = x + iy$, so erhalten wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \tag{3}$$

Fassen wir f auch als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, so ist f genau dann komplex differenzierbar, falls f in $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

Da eine komplex differenzierbare Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar ist (siehe später), folgt daraus sofort, dass Real- und Imaginärteil von f harmonische Funktionen sind, d.h. $\Delta u = \Delta v = 0$.

Eine komplex differenzierbare Funktion ist natürlich stetig.

Bemerkung 2. Es gelten die gleichen Regeln für das Differenzieren wie in $\mathbb{R}$. Insbesondere gelten Summen-, Produkt- und Kettenregel.

Beispiel 1. Die Funktionen $f(z) = z$, $f(z) = z^n$, $f(z) = e^z$ sind in ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, also ganz. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph. Die Funktion $f(z) = |z|$ ist nirgends differenzierbar (nicht nur im Ursprung!), ebenso sind $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ und $f(z) = \bar{z}$ nicht differenzierbar, $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ist nur in $z = 0$ differenzierbar.

Definition 2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \to U$ stetig differenzierbar („C^1-Kurve“). Das Kurvenintegral (Wegintegral) von f längs der Kurve (des Weges) γ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{4}$$

Bemerkung 3. Die Definition ist von der Parametrisierung der Kurve γ unabhängig. Dreht man die Durchlaufrichtung um, so ändert sich das Vorzeichen. O.B.d.A. können wir uns auf Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ beschränken.

Die Definition kann man auf offensichtliche Weise auf stückweise stetig differenzierbare Kurven verallgemeinern. Weitere Verallgemeinerungen sind offensichtlich, wir werden sie aber nicht brauchen.

Satz 1. *(Cauchy'scher Integralsatz) Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

Korollar 2. *Seien U und f wie oben. Seien $\gamma_1 : [0,1] \to U$ und $\gamma_2 : [0,1] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{6}$$

Bemerkung 4. Das Integral ist also vom Verlauf des Weges unabhängig und hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Wichtig ist lediglich, dass wir in U bleiben. Die Bedingung, dass U einfach zusammenhängend ist, ist essentiell.

Daraus folgt, dass jede holomorphe Funktion (lokal) eine Stammfunktion besitzt, die selbst wieder holomorph ist. Wie im Reellen gilt, wenn F Stammfunktion von f ist: $F' = f$ und $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(b) - F(a)$, wobei a und b Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ sind.

Satz 3. *(Cauchy'scher Integralsatz für einen Kreisring) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\{z : r \leq |z - z_0| \leq R\} \subseteq U$ und f holomorph. Dann gilt:*

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz = \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz. \tag{7}$$

Bemerkung 5. $\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz$ bedeutet, dass wir einmal den Kreis $|z - z_0| = R$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Das Integral $\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz$ ist i.A. nicht gleich 0.

Beweis. Dies folgt aus Satz 1. Dazu schneiden wir den Kreisring an einer Stelle durch, wodurch wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet erhalten. Nun wandern wir vom Schnitt zunächst entlang des äußeren Kreises bis an die andere Seite des Schnittes, wandern nun entlang des Schnittes zum inneren Kreis, durchlaufen den inneren Kreis nun in umgekehrter Richtung (über den Schnitt kommen wir ja nicht drüber) und kehren nun entlang des Schnittes (aber auf der anderen Seite des Schnittes) zu unserem Ausgangspunkt auf dem äußeren Kreis zurück. Das Integral über den gesamten Weg ist 0, und die Teilstücke entlang des Weges heben sich auf, da sie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. $\square$

Satz 4. *(Formel von Cauchy) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subseteq U$. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{8}$$

Bemerkung 6. Allgemeiner gilt die Cauchy'sche Formel nicht nur für einen Kreis, sondern für jeden Weg in U, der homotop zu einem Kreis um z_0 ist.

Satz 5. *(Taylorreihe) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$. Dann existiert ein $\rho > 0$, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{9}$$

für alle $|z - z_0| < \rho$ gilt, wobei die c_n durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \tag{10}$$

für ein beliebiges $0 < r < \rho$ gegeben sind.

Bemerkung 7. Der Konvergenzradius ρ ist der Abstand von z_0 zur nächstgelegenen Singularität von f.

Korollar 6. *Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

Korollar 7. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subseteq U$. Sei $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $|z - z_0| \leq r$. Dann gilt für die Taylorkoeffizienten*

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}. \tag{11}$$

Satz 8. *(Satz von Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Bemerkung 8. Der Satz von Liouville folgt unmittelbar aus dem obigen Korollar, da wir r beliebig groß wählen können. Den Fundamentalsatz der Algebra erhalten wir jetzt als Korollar des Satzes von Liouville.

Satz 9. *(Laurentreihe) Sei f holomorph in einem Kreisring $U = \{z : r < |z - z_0| < R\}$. Dann lässt sich f in U folgendermaßen darstellen:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{12}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz. \tag{13}$$

Bemerkung 9. Statt eines Kreises mit Radius $r < \rho < R$ können wir hier jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg in U wählen, der homotop zu einem Kreis um z_0 ist.

Definition 3. Sei f holomorph im Kreisring $U = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$. Dann heißt der Koeffizient c_{-1} der Laurent-Entwicklung das Residuum von f an der Stelle z_0. Es wird mit $\operatorname{res}(f, z_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 10. Offensichtlich gilt $\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{res}(f, z_0)$. Insbesondere gilt $\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$. Durchlaufen wir den Kreis n-mal, so erhalten wir für das entsprechende Kurvenintegral natürlich den n-fachen Wert. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 4. Sei U offen, $z_0 \in U$, γ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve in $U \setminus \{z_0\}$. Dann heißt

$$\chi(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0}\,dz \tag{14}$$

Windungszahl von γ bezüglich z_0.

Satz 10. *(Residuensatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $D \subseteq U$ eine diskrete Teilmenge von U, die keinen Häufungspunkt in U enthält, und γ sei eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve in $U \setminus D$. Weiters sei f holomorph in $U \setminus D$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in D} \chi(\gamma, z) \operatorname{res}(f, z). \tag{15}$$

Bemerkung 11. Zur Berechnung des Integrals reicht also die Kenntnis der Residuen. In der Praxis wählt man normalerweise sich nicht selbst schneidende Kurven γ (Jordankurven), die man natürlich im positiven Sinn durchläuft. Dann gilt $\chi(\gamma, z) = 1$ für alle Punkte innerhalb von γ und $\chi(\gamma, z) = 0$ für alle Punkte außerhalb von γ und die Summe reduziert sich auf alle Singularitäten von f innerhalb von γ.

Aus der Eindeutigkeit von Taylorreihen folgt:

Satz 11. *Sei U ein Gebiet (d.h., offen, zusammenhängend, nicht leer), und $D \subseteq U$ besitze einen Häufungspunkt in U. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$, so gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$.*

Definition 5. Seien $U \subseteq V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Seien $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Dann heißt g analytische Fortsetzung von f, falls $g(z) = f(z)$ für alle $z \in U$.

Satz 12. *Sei U offen und nicht leer und $V \supseteq U$ ein Gebiet. Seien $g_1, g_2 : V \to \mathbb{C}$ analytische Fortsetzungen der analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt $g_1(z) = g_2(z)$ für alle $z \in V$.*

Bemerkung 12. Hier ist wichtig, dass V zusammenhängend ist. Für nicht zusammenhängende Mengen gilt der Satz nicht, insbesondere sind zwei analytische Fortsetzungen $g_1 : V_1 \to \mathbb{C}$ und $g_2 : V_2 \to \mathbb{C}$ auf $V_1 \cap V_2$ im Allgemeinen nicht gleich, wenn $V_1 \cap V_2$ nicht zusammenängend ist, siehe Beispiele unten.

Satz 13. *Sei $f : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ holomorph und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ holomorph.*

Bemerkung 13. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt sofort, dass jede holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 umkehrbar ist.

Beispiel 2. (Wurzelfunktion) Wir betrachten $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Wegen $f'(z) = 2z$ ist f überall außer in z lokal umkehrbar. Globale Umkehrbarkeit ist natürlich nicht gegeben. Betrachten wir die Situation nun genauer: Sowohl $H_1 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ als auch $H_2 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ wird auf die geschlitzte Ebene $G_1 = \mathbb{C} \setminus \{x|x \leq 0\}$ abgebildet. Es existieren also zwei Zweige der Umkehrfunktion: $f^{-1} : G_1 \to H_1$ und $f^{-1} : G_1 \to H_2$, welche die eindeutige Fortsetzung der reellen Wurzelfunktion $x \to \sqrt{x}$ bzw. $x \to -\sqrt{x}$ auf die geschlitzte Ebene G_1 darstellen. Die Eindeutigkeit folgt, da G_1 einfach zusammenhängend ist.

Die Halbebene $H_3 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$ wird ebenfalls auf eine geschlitzte Ebene abgebildet, nämlich auf $G_2 = \mathbb{C} \setminus \{iy|y \leq 0\}$. Der Schnitt $G_1 \cap G_2$ ist jetzt aber nicht mehr zusammenhängend, und die Umkehrfunktionen $f^{-1} : G_1 \to H_1$ und $f^{-1} : G_2 \to H_3$ nehmen zwar im 1.,2., und 4. Quadranten die gleichen Werte an, unterscheiden sich aber im 3. Quadranten. Wenn wir von der Wurzelfunktion reden, müssen wir also immer den entsprechenden Zweig spezifizieren.

Bemerkung 14. (Riemann'sche Flächen) Fassen wir die Bilder $f(H_1)$ und $f(H_2)$ als unterschiedliche Kopien derselben geschlitzten Ebene auf, und kleben diese entlang des Schlitzes geeignet zusammen, erhalten wir eine sogenannte Riemann'sche Fläche. Auf dieser ist die Wurzelfunktion nun eindeutig und holomorph, die Wurzelfunktion ist jetzt also eine Funktion von der Riemann'schen Fläche auf ganz $\mathbb{C}$. Wir wollen darauf aber nicht näher eingehen.

Beispiel 3. (Logarithmus) Da die Exponentialfunktion periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist, haben wir hier sogar unendlich viele Zweige. Wir werden uns daher meist auf den Hauptzweig $S_0 = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi\}$ bechränken, d.h. wir fassen den Logarithmus als eine Funktion $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S_0$ auf, welche in der geschlitzten Ebene G_1 holomorph ist. In diesem Fall gilt $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$, wobei unter $\log|z|$ der übliche reelle Logarithmus zu verstehen ist. Für den k-ten Zweig des Logarithmus gilt $\log(z) = \log|z| + i(\arg(z) + 2\pi k)$.

Durch geeignetes Zusammenkleben der (unendlich vielen) geschlitzten Ebene kann man auch hier eine Riemann'sche Fläche konstruieren.

Definition 6. Sei U offen, $z_0 \in U$, und f sei in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ die Laurent-Reihe von f um z_0. Dann heißt z_0 eine wesentliche Singularität von f, wenn $c_n \neq 0$ für unendlich viele negative n gilt. Gilt $c_n \neq 0$ nur für endlich viele n, so sprechen wir von einem Pol der Ordnung k, wenn k die größte Zahl ist, für die $c_{-k} \neq 0$ gilt. Ein Pol der Ornung 1 heißt einfacher Pol.

Definition 7. Sei U offen und $D \subseteq U$ eine diskrete Menge, die keinen Häufungspunkt in U hat. Eine Funktion f, die in $U \setminus D$ holomorph ist und an den Stellen aus D Pole besitzt, heißt meromorph in U.

Bemerkung 15. f darf also keine wesentlichen Singularitäten in U haben.

Satz 14. *Jede meromorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist der Quotient zweier holomorpher Funktionen $g, h : U \to \mathbb{C}$. (Der Nenner ist dabei natürlich nicht identisch 0).*

Definition 8. Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$. Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ heißt kompakt konvergent gegen f, falls $\{f_n\}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 15. *Konvergiert eine Folge holomorpher Funktionen* $\{f_n\}$ *kompakt gegen* f*, so ist* f *holomorph. Weiters konvergiert* $\{f'_n\}$ *gegen* f'*.*