Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 07.06.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 10

Aufgabe 35: (a) Zeigen Sie für $\mathrm{Re}(x) > 0$

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt.$$

(b) Sei

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Zeigen Sie für $\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\Gamma(x)\Gamma(y)$ durch Verwendung von Polarkoordinaten und substituieren Sie an geeigneter Stelle $t = (\sin\varphi)^2$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $t = \frac{\tau}{\tau+1}$

$$B(x,y) := \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(\tau+1)^{x+y}}d\tau.$$

(d) Berechnen Sie

$$B(x,1-x) := \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)}dt.$$

Hinweis: Die Lösung lautet $B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$. Lösen Sie das Integral mit Hilfe des Residuensatzes. Betrachten Sie dazu die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Wandern Sie zuerst unterhalb des Schlitzes von ∞ nach 0 und dann oberhalb des Schlitzes zurück und schließen Sie den Weg durch einen „Kreis im Unendlichen“.

(1+3+1+3 Punkte)

Aufgabe 36: Beweisen Sie

$$\frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi z)\big)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},$$

indem Sie zeigen, dass die Differenz der linken und rechten Seite eine ganze, periodische Funktion ist, die beschränkt ist und für $\mathrm{Im}(z) \to \pm\infty$ gegen 0 strebt.

Hinweis: Weisen Sie die Analytizität an den Stellen $z \in \mathbb{Z}$ durch Berechnung der ersten Terme der Laurent-Reihe von $\frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi z)\big)^2}$ nach. **(4 Punkte)**

Aufgabe 37: Verwenden Sie das Resultat der vorherigen Aufgabe, um zu zeigen:

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{z+k} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

(4 Punkte)

Abgabe bis zum 17.06.2013!