Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 17.06.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 11

Aufgabe 38: Sei $\Phi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. Zeigen Sie, dass $\Phi(s) = \Phi(1-s)$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ gilt.
(3 Punkte)

Aufgabe 39: (a) Sei $Y(s)$ das Produkt aller L-Reihen $\mod q$. Zeigen Sie, dass $Y(s)$ das Eulerprodukt

$$Y(s) = \prod_p (1 - p^{-h(p)s})^{-k(p)}$$

besitzt, wobei $h(p)$ die Ordnung von p in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ und $k(p) = \frac{\phi(q)}{h(p)}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die L-Reihe $L(s,\chi)$ keine Nullstellen auf der Achse $\{s \mid \mathrm{Re}(s) = 1\}$ hat.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 40: In den Aufgaben 10 und 11 haben Sie die Bernoullizahlen B_n und die Bernoullipolynome $b_n(x)$ kennengelernt.

(a) Zeigen Sie

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{z}{e^z-1} \cdot e^{xz}$ als Produkt von Taylorreihen.

(b) Zeigen Sie

$$b_n(x+1) - b_n(x) = nx^{n-1} \text{ für } n \geq 1 \text{ und}$$

$$b_n(0) = b_n(1) \text{ für } n \geq 2.$$

(c) Zeigen Sie

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

für $n \geq 2$ und leiten Sie daraus eine Rekursionsformel für B_n her.

(d) Verwenden Sie die Integraldarstellung der Hurwitz'schen ζ-Funktion und den Residuensatz, um

$$\zeta(-n,a) = -\frac{b_{n+1}(a)}{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

(e) Berechnen Sie $\zeta(-n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\zeta(2n)$ $n \in \mathbb{N}$. **(2+1+1+2+2 Punkte)**

Abgabe bis zum 24.06.2013!