Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 02.07.2013

Sommersemester 2013

# Analytische Zahlentheorie

## Übungszettel 13

**Aufgabe 45:** Sei

$$J(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \pi(x^{1/n}).$$

(a) Zeigen Sie

$$J(x) = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

(b) Beweisen Sie

$$J(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

**(2+2 Punkte)**

**Aufgabe 46:** Zeigen Sie, dass

$$\psi(x) = x + O\left(\sqrt{x}(\log x)^2\right)$$

genau dann gilt, wenn

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

gilt. *Hinweis:* Bem. 4.3 und Lemma 4.4. **(4 Punkte)**

**Aufgabe 47:** Sei $\chi$ ein Dirichletcharakter mod $q$ und sei $\chi_1$ der Hauptcharakter (mod $q$). Zeigen Sie:

(a) Für $q \ge 2$ gilt: $L(0, \chi_1) = 0$.
*Hinweis:* Verwenden Sie, dass für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$L(s, \chi_1) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}).$$

(b) Für $\chi \ne \chi_1$ gilt:

$$L(0, \chi) = -\frac{1}{q} \sum_{\ell=1}^{q} \ell\, \chi(\ell).$$

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 40, um $\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a$ zu zeigen.

(c) Sei $\chi \ne \chi_1$ und $\chi(-1) = 1$. Dann gilt $L(0, \chi) = 0$.
*Hinweis:* $L(0, \chi) = \chi(-1) L(0, \chi)$. **(2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 48:** Leiten Sie eine Funktionalgleichung für $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ her. **(2 Punkte)**

**Abgabe bis zum 08.07.2013!**