Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 08.07.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 14

Aufgabe 49: Ziel ist die Berechnung von $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$. Betrachten Sie dazu die Funktionalgleichung

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

(a) Die Digamma-Funktion ist definiert durch

$$\digamma(z) := \frac{d\log(\Gamma(z))}{dz}.$$

Geben Sie eine Reihendarstellung für $\digamma(z)$ an.

(b) Zeigen Sie mit deren Hilfe

$$\digamma(1) = -\gamma$$
$$\digamma(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

wobei γ die Euler-Mascheroni'sche Konstante ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$$

für $s \to 1$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Formeln

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}) \text{ für } \mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1,$$
$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(x^{-1}).$$

(d) Zeigen Sie nun

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{1-s} + \gamma + O(s-1) \quad \text{für } s \to 1.$$

(e) Berechnen Sie nun $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$. **(2+2+2+2+1 Punkte)**

Aufgabe 50: Zeigen Sie mit elementaren Methoden:

(a) Sei $k > 2$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p, die nicht von der Form $p = kn + 1$ sind.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $3n + 1$.
Hinweis: Eine ungerade Primzahl p ist genau dann von der Form $p = 3n + 1$, wenn -3 quadratischer Rest bezüglich p ist, d.h. $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$. **(2+2 Punkte)**

bitte wenden

Aufgabe 51: Wir betrachten das Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$. Ein Gitterpunkt $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ heißt *sichtbar*, wenn $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ gilt (deuten Sie diese Definition geometrisch!). Sei $S(x)$ die Zahl der sichtbaren Gitterpunkte im Quadrat $\{(m,n) : |m|, |n| \leq x\}$. Zeigen Sie

$$S(x) = \frac{24}{\pi^2} x^2 + O(x \log x)$$

und verwenden Sie dieses Ergebnis, um die Dichte der sichtbaren Gitterpunkte

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S(x)}{G(x)}$$

zu berechnen, wobei $G(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Quadrat $\{(m,n) : |m|, |n| \leq x\}$ bezeichnet.

Hinweis: Zählen Sie die Punkte in einem Oktanten! Was ist bei den Gitterpunkten auf dem Rand des Oktanten zu beachten? Denken Sie daran, dass wir das asymptotische Verhalten für die Eulerfunktion berechnet haben. **(3 Punkte)**

Abgabe bis zum 15.07.2013!