Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 07.05.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 5

Aufgabe 16: Zeigen Sie:

(a) Falls $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, so gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\pi(x))}{\log x} = 1$.

(b) Falls $\pi(x)\log(\pi(x)) \sim x$, so gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\pi(x))}{\log x} = 1$.

(c) Die Aussagen $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ und $\pi(x)\log(\pi(x)) \sim x$ sind äquivalent.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 17: Sei p_n die n-te Primzahl. Zeigen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes, dass die Reihe $\sum_n \frac{1}{p_n}$ divergiert.
Hinweis: Beachten Sie, dass der Primzahlsatz zur Aussage $p_n \sim n \log n$ äquivalent ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 18: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(n) := \log n + 2\gamma - d(n),$$

wobei d die Teilerfunktion und γ die Euler-Mascheroni'sche Konstante bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{M}_f(x) := \sum_{n\leq x} f(n) = O(\sqrt{x})$.

(b) $\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n} = C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ für eine geeignete Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie partielle Summation, um (b) aus (a) herzuleiten.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 19: Es gelte $f(x) = o(1)$ für $x \to \infty$.

(a) Zeigen Sie: $\int_1^x f(t)\,dt = o(x)$ für $x \to \infty$.

(b) Im Allgemeinen gilt nicht: $\int_1^x f(t)\frac{x}{t}\,dt = o(x)$ für $x \to \infty$. Gilt zumindest $\int_1^x f(t)\frac{x}{t}\,dt = O(x)$?

(c) Gilt $\int_1^x f(t)\frac{t}{x}\,dt = o(x)$ für $x \to \infty$? **(2+3+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 13.05.2013!