Universität Bielefeld
Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 27.05.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 8

Aufgabe 27: Sei f eine arithmetische Funktion, deren zugehörige Dirichlet-Reihe $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ die Konvergenzabszisse σ_c besitze.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(n)| \leq C_\varepsilon n^{\sigma_c+\varepsilon}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und $\sigma_0 > \sigma_c$ Konstanten $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $d_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes $N \geq 1$ und alle s mit $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c + 1$ gilt:

$$|F(s)| \leq c_\varepsilon N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + d_\varepsilon |s| N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Abel geeignet auf die Summe $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ an.

(c) Schließen Sie daraus, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante D_ε existiert, sodass für alle $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c + 1$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \geq 1$ gilt:

$$|F(\sigma + it)| \leq D_\varepsilon |t|^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Formel von Perron auch dann noch gilt, wenn man nur $\sigma > \sigma_c - c$ fordert, d.h., es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s+z) \frac{x^z}{z} \, dz = \sum_{n \leq x}{}^{*} \frac{f(n)}{n^s}$$

für alle $x, c > 0$. **(1+3+1+2 Punkte)**

Aufgabe 28: Bestimmen Sie alle Dirichlet–Charaktere mod 4 und berechnen Sie die zugehörigen L-Reihen, d.h., drücken Sie die L-Reihen durch die Riemannsche ζ-Funktion aus.
(Hinweis: Bestimmen Sie zunächst alle möglichen Homomorphismen von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ nach S^1 und erweitern Sie diese dann zu den entsprechenden Dirichlet-Charakteren.) **(3 Punkte)**

Aufgabe 29: Beweisen Sie: Sei χ ein Dirichlet-Charakter (mod q). Dann hat die L-Reihe $L(s, \chi)$ die Abszisse der absoluten Konvergenz $\sigma_a = 1$ und sie besitzt die Darstellung

$$L(s,\chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \chi(p)\, p^{-s})^{-1}.$$

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 03.06.2013!