Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 04.06.2013

Sommersemester 2013

Analytische Zahlentheorie

Übungszettel 9

Aufgabe 30: Beweisen Sie die folgende Behauptung: Sei χ_1 der Hauptcharakter mod q. Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(s, \chi_1) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \mid q \\ p \in \mathbb{P}}} (1 - p^{-s}).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 31: Zeigen Sie:

$$\zeta(s, \tfrac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 32: Sei $\chi \neq \chi_1$ ein Dirichletcharakter. Zeigen Sie, dass $L(s, \chi)$ die Konvergenzabszisse $\sigma_c = 0$ besitzt. **(2 Punkte)**

Aufgabe 33: Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften der periodischen ζ–Funktion

$$F(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n x} n^{-s}.$$

(a) Die Reihe konvergiert absolut für $\sigma > 1$, die Konvergenz ist gleichmäßig in x.

(b) $F(x + 1, s) = F(x, s)$ und $F(1, s) = \zeta(s)$.

(c) Für $x \notin \mathbb{Z}$ gilt $\sigma_c = 0$. **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 34: Sei $0 < a \leq 1$, $0 < r < \pi$ und $S(r) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ z \,\middle|\, |z - 2\pi i n| < r \right\}$. Zeigen Sie, dass

$$g(z) = \frac{e^{az}}{1 - e^z}$$

auf $S(r)$ beschränkt ist.

Hinweis: Zerlegen Sie $S(r)$ in drei Bereiche: die beiden Halbebenen $\{\mathrm{Re}(z) \leq -1\}$ und $\{\mathrm{Re}(z) \geq 1\}$ sowie den Streifen $\{|\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$, den Sie noch geeignet in Rechtecke zerlegen.

(3 Punkte)

Abgabe bis zum 10.06.2013!