Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 6.7.2016

Sommersemester 2016

Mathematik II für Chemie

Übungsblatt 13

Aufgabe 58: (a) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie e^A und e^{tA}.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = A\,x(t)$, $x(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. **(4+1 Punkte)**

Aufgabe 59: (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{sp}(ABC) = \mathrm{sp}(BCA)$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie die Dreifachsumme explizit an.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{sp}(S^{-1}AS) = \mathrm{sp}(A)$. **(1+1 Punkte)**

Aufgabe 60: Sei A eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, d.h. A ist diagonalisierbar. Sei $S = (v_1, \ldots, v_n)$, wobei $v_1, \ldots, v_n$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind. Seien $u_1^\dagger, \ldots, u_n^\dagger$ die Zeilen von S^{-1}.

(a) Zeigen Sie, dass $P_i = v_i u_i^\dagger$ eine Projektionsmatrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass v_i ein Eigenvektor von P_i zum Eigenwert 1 und v_j Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist, falls $j \neq i$.

(c) Zeigen Sie $P_i P_j = 0$, falls $i \neq j$. **(1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 61: (a) Diagonalisieren Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie A^{100}, und falls existent, auch A^{-1} und A^{-100}.

(c) Berechnen Sie die Projektionsmatrizen P_1 und P_2 bezüglich der Eigenwerte λ_1 und λ_2(siehe oben).

(d) Berechnen Sie $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. Was fällt Ihnen auf? **(3+2+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 13.7.2016!