Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 14.11.2013

Wintersemester 2013/14

Elementare Zahlentheorie

Übungszettel 5

Aufgabe 23: (a) Sei $a \equiv \pm 1 \pmod 8$. Zeigen Sie, dass $a^{2^{k-3}} \equiv 1 \pmod{2^k}$ für $k \geq 4$ gilt.

(b) Sei $a \equiv \pm 3 \pmod 8$. Zeigen Sie, dass für $k \geq 3$ eine ungerade Zahl u_k existiert, sodass $a^{2^{k-2}} - 1 = 2^k u_k$ gilt.
Hinweis für den Induktionsschritt: $a^{2^{k-2}} + 1$ lässt sich in der Form $a^{2^{k-2}} + 1 = 2^t v_k$ darstellen, wobei v_k ungerade und $t \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich, welchen Wert t hat.

(c) Sei $a \equiv \pm 3 \pmod 8$. Bestimmen Sie die Ordnung von $a \pmod{2^k}$ für $k \geq 3$.
(1+3+2 Punkte)

(d)* Bestimmen Sie die von $[3]_{2^k}$ erzeugte Untergruppe H von $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$ und bestimmen Sie alle Nebenklassen von H in $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$. *Hinweis:* $3^j \pmod 8$. **(2 Bonuspunkte)**

Aufgabe 24: In $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ können wir ebenfalls irreduzible, zusammengesetzte und prime Elemente definieren: Sei $a \in R$ weder 0 noch eine Einheit. a heißt zusammengesetzt, wenn es $b, c \in R \setminus R^*$ gibt, sodass $a = bc$. Andernfalls heißt a irreduzibel. a heißt prim, wenn für alle $b, c \in R$ gilt: $a \mid bc \Longrightarrow (a \mid b) \vee (a \mid c)$.

Bestimmen Sie alle zusammengesetzten, alle irreduziblen und alle primen Elemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Kommentieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: $-a$ ist genau dann zusammengesetzt/irreduzibel/prim, wenn a dies ist.
(4 Punkte)

Aufgabe 25: Seien $\operatorname{ord}_m(a)$ und $\operatorname{ord}_m(b)$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}_m(ab) = \operatorname{ord}_m(a) \operatorname{ord}_m(b)$ gilt.
(2 Punkte)

Aufgabe 26: Betrachten Sie die reellen Polynome $x^4 + 1$ und $x^3 + 1$. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ihren größten gemeinsamen Teiler $g(x)$ und und stellen Sie diesen als Linearkombination von $x^4 + 1$ und $x^3 + 1$ dar, d.h. finden Sie Polynome $a(x)$ und $b(x)$, sodass $g(x) = a(x)(x^4 + 1) + b(x)(x^3 + 1)$. **(4 Punkte)**

Abgabe bis zum 21.11.2013!