Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 10.10.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 1

Aufgabe 6: Seien $a_1, \ldots, a_8$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass mindestens eine Differenz $a_i - a_j$ durch 7 teilbar ist.
Hinweis: Lösen Sie erst eine andere Aufgabe diese Zettels. **(2 Punkte)**

Aufgabe 7: Sei X eine nichtleere endliche Menge mit $|X| = n$.

(a) Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen der Menge der Teilmengen von X und der Menge der 0-1-Wörter der Länge n an.

(b) Wie viele 0-1-Wörter der Länge n gibt es? Beweisen Sie Ihre Antwort durch vollständige Induktion nach n.

(c) Wie viele Teilmengen hat X also? **(2+2+1 Punkte)**

Aufgabe 8: Zur Erinnerung: eine Relation $\sim$ auf einer Menge X heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sind:

$$x \sim x \qquad \text{(reflexiv)}$$
$$x \sim y \Longrightarrow y \sim x \qquad \text{(symmetrisch)}$$
$$x \sim y \;\wedge\; y \sim z \Longrightarrow x \sim z \qquad \text{(transitiv)}$$

(a) Die Mengen der Form $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ heißen Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y \in X$ entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$ gilt.

(b) Sei $X = \mathbb{Z}$. Zwei Zahlen x, y seien äquivalent, d.h. $x \equiv y$, falls ihre Differenz $x - y$ durch 7 teilbar ist. Zeigen Sie, dass $\equiv$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv$. **(2+2+2 Punkte)**

Aufgabe 9: Beweisen Sie das folgende, verallgemeinerte Schubfachprinzip: Gegeben seien n Zahlen $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, und sei $M = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} m_i$. Werden mindestens M Gegenstände auf n Schubladen verteilt, die von 1 bis n durchnummeriert sind, so gibt es eine Schublade i, in der mindestens m_i Gegenstände liegen.

Wie hängt diese Aussage mit dem Schubfachprinzip zusammen? **(2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 17.10.2014!