Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 19.12.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 10

Aufgabe 42: Zeigen Sie, dass für die Faltung arithmetischer Funktionen das Assoziativgesetz gilt, d.h. $f * (g * h) = (f * g) * h$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 43: Sei $\tau(n)$ die Zahl der Teiler von n (τ heißt Teilerfunktion).

(a) Ist τ multiplikativ?

(b) Sei p eine Primzahl und $r \geq 1$. Berechnen Sie $\tau(p^r)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\tau = u * u$ gilt. (Hier ist $u(n) \equiv 1$ wie in der Vorlesung)

(d) Ist τ vollständig multiplikativ? **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 44: Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Inverse einer multiplikativen Funktion multiplikativ ist.
Hinweis: Benützen Sie die Rekursionsformel und ergänzen Sie die Summe um einen geeigneten Term, sodass Sie diese schließlich als Produkt zweier Summen schreiben können. **(3 Punkte)**

Aufgabe 45: Berechnen Sie die Dirichlet-Inverse der folgenden Funktion: $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = a$, $f(6) = a$ und $f(n) = 0$ für alle anderen Werte von n.
Hinweis: Verwenden Sie die Rekursionsformel für die Dirichlet-Inverse. Beachten Sie, dass f multiplikativ ist. Wie vereinfacht das die Rechnung (beachten Sie Aufgabe 44)? **(4 Punkte)**

Aufgabe 46: Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn $n \in \mathbb{N}$ nicht prim ist, dann ist $2^n - 1$ auch nicht prim.
Hinweis: Summenformel für die geometrische Reihe.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $2^n - 1$ prim ist (wegen Teil (a) ist dann auch n prim), dann ist $2^{n-1}(2^n - 1)$ eine *vollkommene Zahl*. Dabei heißt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ *vollkommen*, falls n genau die Summe ihrer *echten positiven Teiler* ist, falls also gilt:

$$n = \sum_{\substack{d|n \\ 1 \leq d < n}} d\,.$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 47*: Ist die Faltung zweier vollständig multiplikativer Funktionen eine vollständig multiplikative Funktion? **(1 Bonuspunkt)**

Bonusaufgaben vom Klausurtyp

Aufgabe 48: Sei f eine vollständig multiplikative Funktion. Zeigen Sie, dass ihre Dirichlet-Inverse durch $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ gegeben ist. **(1 Bonuspunkt)**

(bitte wenden)

Aufgabe 49: Seien f_n die Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie für $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i-1}\ f_i = -f_{2n-1} + 1\,.$$

(1 Bonuspunkt)

Aufgabe 50: Lösen Sie die folgende Rekursion:

$$b_{n+1} = -2b_n + 8b_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2$$
$$b_1 = 3,\ b_2 = 0\,.$$

(1 Bonuspunkt)

Aufgabe 51: Wieviele Möglichkeiten gibt es,

(a) eine Getränkekiste mit zwölf Fächern mit zwei verschiedenen Sorten Limonadeflaschen zu befüllen?

(b) eine Getränkekiste mit zwölf Fächern mit drei verschiedenen Sorten Limonadeflaschen so zu befüllen, dass sich h_i Flaschen der Sorte i in der Kiste befinden (also $0 \leq h_i \leq 12$ mit $h_1 + h_2 + h_3 = 12$)? **(1 Bonuspunkt)**

Aufgabe 52: Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, $n + k$ als Summe von k positiven ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ darzustellen? Gesucht ist also die Anzahl der geordneten k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$$x_1 + \ldots + x_k = n.$$

Z.B. gibt es für $n = k = 2$ die drei Möglichkeiten

$$3 + 1$$
$$2 + 2$$
$$1 + 3.$$

Geben Sie außerdem alle Möglichkeiten für $n = k = 3$ an.
Hinweis: Zeigen Sie, dass sich die verschiedenen Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ als 0-1-Folgen der Länge $n + k - 1$ mit genau n Einsern kodieren lassen. **(1 Bonuspunkt)**

Aufgabe 53: Bei einer Klausur gibt es 8 Aufgaben. Die Klausur wird von 6 TutorInnen korrigiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 8 Aufgaben so auf 6 Tutoren zu verteilen, dass jedeR mindestens eine Aufgabe korrigiert? *Hinweis:* Sie müssen nicht das ganze Dreieck ausrechnen.
(1 Bonuspunkt)

Aufgabe 54: Wieviele verschiedene Möglichkeiten a_n gibt es, aus Rechtecken der Seitenlängen 1×4, 4×1, 3×4, 4×3 und 4×4 ein Rechteck mit den Seitenlängen $n \times 4$ zu legen?

(a) Bestimmen Sie a_1, a_2, a_3 und a_4.

(b) Zeigen Sie, dass mit $a_0 := 1$ für alle $n \geq 4$ die Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 4a_{n-4}$$

gilt.

(c) Berechnen Sie die erzeugende Funktion $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Hinweis: Es ist nur die erzeugende Funktion gefragt, die a_n müssen nicht berechnet werden.

(2 Bonuspunkte)

Abgabe bis zum 9.1.2015!

Frohe Weihnachten und alles Gute im neuen Jahr!