Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 31.10.2014

Wintersemester 2014/15

# Diskrete Mathematik

## Übungszettel 4

**Aufgabe 18:** Bestimmen Sie die Zahl der monoton fallenden Funktionen $f\colon \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$.
*Hinweis:* Finden Sie eine geeignete Bijektion zwischen der Menge der monoton fallenden und der monoton steigenden Funktionen. **(2 Punkte)**

**Aufgabe 19:** Bestimmen Sie die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f\colon \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$.
*Hinweis:* Sei $X$ die Menge aller Abbildungen $f : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$. Definieren Sie $X_i$ für $1 \le i \le n$ als die Menge der Abbildungen $f : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ mit $i \notin f(\{1,\dots,m\})$. Gesucht ist also

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| .$$

Drücken Sie das Resultat durch die Stirling Zahlen zweiter Art

$$S(k,\ell) := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} (\ell - j)^k$$

aus. **(3 Punkte)**

**Aufgabe 20:** Sei $n$ eine natürliche Zahl. Ein Fixpunkt von $\pi \in S_n$ ist ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\pi(i) = i$. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Permutationen aus $S_n$, die keinen Fixpunkt haben.

(b) die Anzahl der Permutationen aus $S_n$, die mindestens einen Fixpunkt haben.

(c) die Anzahl der Permutationen aus $S_n$, die genau $k$ Fixpunkte ($1 \le k \le n$) haben.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Mengen $X_i = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$ und verwenden Sie die Siebformel. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Zahlen $d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!})$ aus. **(3+1+2 Punkte)**

**Aufgabe 21:** Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die folgenden Rekursionen:

(a) $a_{n+1} = q\, a_n$, $a_0 = c$.

(b) $a_{n+1} = a_n + k$, $a_0 = m$.

(c) $a_{n+1} = q\, a_n + k$, $a_0 = c$.

(d) $a_{n+1} = a_n^k$, $a_0 = c$. **(1+1+2+1 Punkte)**

**Abgabe bis zum 14.11.2014!**