Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 5.12.2014

Wintersemester 2014/15

Diskrete Mathematik

Übungszettel 8

Aufgabe 34: Seien $S(n,k)$ die Stirling-Zahlen zweiter Art.

(a) Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdot \ldots \cdot (1-kx)}.$$

(b)* Wie lautet eine analoge Formel für die Binomialkoeffizienten?

(3 Punkte +1 Bonuspunkt)

Aufgabe 35: Seien $S(n,k)$ die Stirling-Zahlen zweiter Art.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Rekursion für die Stirling-Zahlen durch vollständige Induktion über n die folgende Gleichung

$$S(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (k+1)^{n-j} S(j,k).$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$.

(b) Gilt die obige Gleichung auch für $0 \leq n < k$? **(3+1 Punkte)**

Aufgabe 36: Seien $S(n,k)$ die Stirling-Zahlen zweiter Art. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Stirling-Zahlen und einem kombinatorischen Argument, dass die folgende Gleichung

$$S(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} S(j,k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ gilt.
Hinweis: Die Gleichung soll hier also *nicht* mit vollständiger Induktion bewiesen werden! Die linke Seite gibt die Zahl der Partitionen von $X := \{1,\ldots,n+1\}$ mit $k+1$ Teilen an, auf der rechten Seite werden nur Partitionen mit k Teilen (von Mengen mit $j \leq n$ Elementen) gezählt. Wie kann man aus einer Partition von X mit $k+1$ Teilen eine Partition einer kleineren Menge mit k Teilen erhalten? Offensichtlich dadurch, dass man eine Teilmenge streicht. Welche Teilmenge streicht man zweckmäßigerweise? **(3 Punkte)**

Aufgabe 37: Betrachten Sie den euklidischen Algorithmus $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ für zwei ganze Zahlen a, b mit $0 < |b| < |a|$ wie in der Vorlesung in zwei verschiedenen Varianten.

(a) Betrachten Sie zuerst die Variante mit $-\frac{|r_{k-1}|}{2} < r_k \leq \frac{|r_{k-1}|}{2}$. Zeigen Sie, dass der euklidische Algorithmus nach spätestens $[\log_2 |b|] + 1$ Schritten terminiert, d.h. es existiert ein $k \leq [\log_2 |b|] + 1$ so, dass $r_k = 0$ gilt.
Hinweis: Hier bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

(bitte wenden)

(b) Betrachten Sie im Folgenden die Variante mit $0 \leq r_k < r_{k-1}$. Zeigen Sie, dass hier nicht mehr als $2[\log_2 |b|] + 1$ Schritte notwendig sind.

Hinweis: Vergleichen Sie die einzelnen Schritte der beiden Varianten.

(c) Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, f_1 = f_2 = 1$. Geben Sie den euklidischen Algorithmus für $a = f_{m+1}, b = f_m$ explizit an, d.h. geben Sie q_k und r_k für alle k an.

(d) Geben Sie das kleinste Paar (lexikographische Ordnung) zweier Zahlen an, für das der euklidische Algorithmus nach 5 Schritten stoppt. **(1+2+2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 12.12.2014!