Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 3.11.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 3

Aufgabe 14: (a) Zeigen Sie die folgende Behauptung: Seien $\pi, \sigma \in S_n$. Die Permutation π vertausche nur die Elemente der Menge $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$, d.h. $\pi(i) = i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus U$. Analog permutiere σ nur die Elemente von V. Falls U und V disjunkt sind, so gilt $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$.

(b) Gilt die Umkehrung, d.h. folgt aus $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$, dass U und V disjunkt sind?

(c) Seien $\pi, \sigma \in S_n$ wie oben mit U und V disjunkt. Sei $\mathrm{ord}(\pi) = k$ und $\mathrm{ord}(\sigma) = m$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $\pi \circ \sigma$ das kleinste gemeinsame Vielfache von k und m teilt. Gilt sogar $\mathrm{ord}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{kgV}(k, m)$? **(2+1+2 Punkte)**

Aufgabe 15: Verwenden Sie den Binomialsatz, um die folgenden Formeln zu beweisen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Was gilt im Fall $n = 0$? **(1+2 Punkte)**

Aufgabe 16: (a) Zeigen Sie, dass für $0 \leq k \leq m \leq n$ die folgende Formel gilt:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

(b) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}.$$

Hinweis: Verwenden Sie (a) und 15(b).

(c) Seien f_j für $j \in \mathbb{N}_0$ beliebige reelle Zahlen und sei

$$g_n := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f_j$$

für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Umkehrformel

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j g_j$$

für alle $n \geq 0$ gilt. *Hinweis:* Beachten Sie, dass Sie beim Vertauschen der Summationsreihenfolge die Summationsgrenzen anpassen müssen. **(1+2+2 Punkte)**

Aufgabe 17: (a) Es gebe 50 StudentInnen und zwei Übungsgruppen. In die Übungsgruppe am Montag sollen 24 StudentInnen eingeteilt werden, in die vom Dienstag 26. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es?

(bitte wenden)

(b) Dank zusätzlicher Mittel für TutorInnen können im folgenden Semester drei Übungsgruppen gebildet werden. Diesmal sollen die Montagsgruppe 16 StudentInnen besuchen, die Dienstagsgruppe 18 StudentInnen und die Mittwochgruppe wieder 16 StudentInnen. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, n StudentInnen auf k Übungsgruppen zu verteilen, wobei die Übungsgruppen $i = 1, \dots, k$ die Gruppengrößen $0 \leq m_i \leq n$ mit $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ haben sollen. Geben Sie eine Formel mit kurzer Begründung an.

(1+1+2 Punkte)

Abgabe bis zum 10.11.2016!