Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 10.11.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 4

Aufgabe 18: Gegeben seien n Mengen X_i mit jeweils genau $n-1$ Elementen. Der Durchschnitt zweier verschiedener Mengen X_i und X_j habe $n-2$ Elemente. Analog enthalte der Durchschnitt $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ von k verschiedenen Mengen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ genau $n-k$ Elemente (für $1 \leq k \leq n$). Wie viele Elemente enthält $X_1 \cup \cdots \cup X_n$? **(3 Punkte)**

Aufgabe 19: Sei n eine natürliche Zahl. Ein Fixpunkt von $\pi \in S_n$ ist ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\pi(i) = i$. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die mindestens einen Fixpunkt haben.

(b) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die keinen Fixpunkt haben.

(c) die Anzahl der Permutationen aus S_n, die genau k Fixpunkte ($1 \leq k \leq n$) haben.

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $X_i = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$ und verwenden Sie die Siebformel. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe der Zahlen $d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!})$ aus. **(3+1+2 Punkte)**

Aufgabe 20: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ gilt, wobei die f_n die Fibonaccizahlen sind. Schließen Sie daraus, dass $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ gilt. **(3 Punkte)**

Aufgabe 21: Bestimmen Sie die ersten 5 Folgenglieder und geben Sie eine geschlossene Formel für die folgenden Rekursionen an:

(a) $a_{n+1} = a_n + q^n, \quad a_0 = 0.$

(b) $a_{n+1} = q\, a_n, \quad a_0 = c.$

(c) $a_{n+1} = a_n + k, \quad a_0 = m.$

(d) $a_{n+1} = a_n^k, \quad a_0 = c,$ wobei k eine natürliche Zahl ist. **(1+1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 17.11.2016!