Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 8.12.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 8

Aufgabe 32: Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^4 - 4x^2 - 4x - 1$ und $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. **(4 Punkte)**

Aufgabe 33: Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel, dass

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{r_i} - p_i^{r_i - 1}\right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

gilt, falls $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n ist (die p_i sind alle verschieden). *Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass die Zahl der durch p_i teilbaren Zahlen $0 \leq m < n$ durch $\frac{n}{p_i}$, die Zahl der durch p_i und p_j teilbaren Zahlen durch $\frac{n}{p_i p_j}$ usw. gegeben ist. **(4 Punkte)**

Aufgabe 34: Sei φ die Euler'sche φ-Funktion.

(a) Bestimmen Sie alle Primpotenzen p^r, für die $\varphi(p^r)$ ungerade ist.

(b) Bestimmen Sie alle n, für die $\varphi(n)$ ungerade ist.

(c) Bestimmen Sie alle n, für die $\varphi(n) = 2$ gilt.

(d) Ist $\varphi(n)$ vollständig multiplikativ? **(1+1+1+1 Punkte)**

Aufgabe 35: Zeigen Sie, dass für die Faltung arithmetischer Funktionen das Assoziativgesetz gilt, d.h. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie die Faltung $f * g$ auch als

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{a,b \\ ab=n}} f(a)g(b)$$

schreiben können. **(2 Punkte)**

Aufgabe 36: Sei $\tau(n)$ die Zahl der Teiler von n (τ heißt Teilerfunktion).

(a) Ist τ multiplikativ?

(b) Sei p eine Primzahl und $r \geq 1$. Berechnen Sie $\tau(p^r)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\tau = u * u$ gilt. (Hier ist $u(n) \equiv 1$ wie in der Vorlesung)

(d) Ist τ vollständig multiplikativ? **(1+1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 15.12.2016!