Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 22.12.2016

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Freiwilliges Übungsblatt 10

Aufgabe 41*: (a) In einem Studentenheim gibt es 27 Zimmer. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Studierende auf diese Zimmer zu verteilen? (Jede(r) Studierende bekommt genau ein Zimmer, und zwar ein Zimmer allein.)

(b) In einem anderen Studentenheim gibt es 23 Zimmer, von denen 12 barrierefrei sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 23 Studierende auf diese Zimmer zu verteilen, wenn unter den Studierenden eine Rollstuhlfahrerin und ein Rollstuhlfahrer sind.

(0,5+1 Bonuspunkte)

Aufgabe 42*: Gegeben seien 3 Mengen A, B, C. Die Menge A enthalte 10 Elemente, die Mengen B und C enthalten je 9 Elemente. Weiters seien bekannt: $|A \cap B| = 3, |A \cap C| = 6, |B \cap C| = 4$ und $|A \cap B \cap C| = 2$. Wie viele Elemente enthält die Menge $A \cup B \cup C$? Wie viele Elemente enthält die Menge $(A \cup B) \setminus C$? **(1 Bonuspunkt)**

Aufgabe 43*: Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit Begründung!).

(a) Lässt sich 5 in der Form $5 = 7m + 2n$ mit ganzen Zahlen m, n darstellen?

(b) Gegeben sei die Permutation $\pi = (1\,3\,5\,7\,9)(2\,10)(4\,6\,8)$. Wie groß ist ihre Ordnung?

(0,5+0,5 Bonuspunkte)

Aufgabe 44*: Geben Sie eine explizite Lösungsformel für die folgende Rekursion an:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 10a_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \\ a_0 &= 3 \\ a_1 &= 1. \end{aligned}$$

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 45*: Berechnen Sie die erzeugende Funktion für die folgende Rekursion.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + 1 \text{ für } n \geq 2 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0. \end{aligned}$$

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 46*: (a) Gegeben seien gelbe Rechtecke mit Seitenlängen 2×1, sowie blaue und rote Rechtecke mit Seitenlängen 3×1. Sei a_n die Zahl der $n \times 1$-Rechtecke, die man aus diesen Rechtecken legen kann. Berechnen Sie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

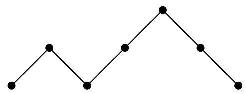
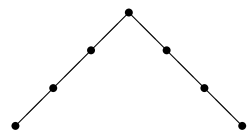
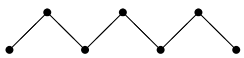
(b) Bestimmen Sie eine Rekursion für a_n für $n \geq 4$. **(0,5+1 Bonuspunkte)**

Aufgabe 47*: Berechnen Sie $5^{1000} \pmod 7$.
Hinweis: Wir werden noch eine effiziente Methode zur Lösung solcher Aufgaben kennen lernen. Trotzdem können Sie diese Aufgabe mit etwas Denken und Rechnen schon jetzt ohne Taschenrechner lösen. **(1 Bonuspunkt)**

(bitte wenden)

Aufgabe 48*: Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $2x^3 + 4x^2 - 2$ und $x^3 - 2x + 1$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. **(1 Bonuspunkt)**

Aufgabe 49*: Ein Dyck-Pfad ist ein Pfad, der nur aus Schritten $(1, 1)$ und $(1, -1)$ besteht, und die x-Achse nie unterschreitet. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Dyck-Pfade von $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$ durch die n-te Catalan-Zahl C_n gegeben ist.

Hinweis: Dyck-Pfade sind z.B.  und  und . Setzen Sie $a_0 = 1$, wenn a_n die Anzahl der Dyck-Pfack von $(0, 0)$ nach $(2n, 0)$ ist.

Bemerkung: Hier ist ein vollständiger Beweis gefragt, nicht nur ein Verweis auf ein Beispiel aus der Vorlesung. **(2 Bonuspunkte)**

Abgabe bis zum 12.1.2017!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2017!