Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 12.1.2017

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 11

Aufgabe 50: Geben Sie alle Lösungen der folgenden Kongruenzen an.

(a) $2x \equiv 3 \pmod 7$

(b) $11x \equiv 7 \pmod{22}$

(c) $15x \equiv 3 \pmod 9$ **(5 Punkte)**

Aufgabe 51: Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass x genau dann eine Lösung der Kongruenz $ax \equiv b \pmod{k\ell}$ ist, wenn x Lösung des Systems

$$\begin{aligned} ax &\equiv b \pmod k \\ ax &\equiv b \pmod \ell \end{aligned}$$

ist. **(2 Punkte)**

Aufgabe 52*: Sei $n > 1$. Besitzt die Kongruenz

$$nx \equiv 7 \pmod{2n+1}$$

eine Lösung? Wenn ja, wie lautet sie? **(2 Bonuspunkte)**

Aufgabe 53: Zeigen Sie:

(a) Für jedes ungerade n gilt: $544 \mid (n^{17} - n)$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 544 und beweisen Sie die Teilbarkeit für jeden Primfaktor separat.

(b) $5^{48} + 5^{36} - 5^{12} - 1$ ist durch 247 teilbar.
Hinweis: analog zu oben. **(2+2 Punkte)**

Aufgabe 54: Sei $k = \mathrm{ord}_m(a)$ die Ordnung von a modulo m. Zeigen Sie:

(a) $a^h \equiv 1 \pmod m$ genau dann, wenn $k|h$.

(b) $a^i \equiv a^j \pmod m$ genau dann, wenn $i \equiv j \pmod k$.

(c) Die Restklassen $[a]_m, [a^2]_m, \ldots, [a^k]_m$ sind paarweise verschieden.

(d) $\mathrm{ord}_m(a^h) = \frac{k}{\mathrm{ggT}(h,k)}$.

(e) $\mathrm{ord}_m(a^h) = k$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(h,k) = 1$. **(2+1+1+2+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 19.1.2017!