Universität Bielefeld

Peter Zeiner
Fakultät für Mathematik

Bielefeld, 26.1.2017

Wintersemester 2016/17

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 13

Aufgabe 61: In einem Graph mit n Vertices seien alle Vertices durch Kanten verbunden (so ein Graph heißt vollständiger Graph K_n.)

(a) Wie viele Kanten besitzt dieser Graph?

(b) Besitzt der vollständiger Graph K_n einen Zyklus?

(c) Wie viele Teilgraphen von K_n gibt es, die genau eine Kante weniger als K_n haben? Welche dieser Teilgraphen sind isomorph? **(1+1+2 Punkte)**

Aufgabe 62: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Der Abstand $d(u, v)$ zweier Vertices $u, v \in V$ ist definiert als die Länge eines kürzesten Pfades von u nach v. Der Durchmesser $\operatorname{diam}(G)$ ist der größte Abstand in G.

(a) Zeichnen Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\big\}$. Wie groß sind die Abstände $d(1, 6)$, $d(2, 5)$ und $d(7, 8)$? Wie groß ist der Durchmesser $\operatorname{diam}(G)$?

(b) Zeigen Sie: Falls zwei verschiedene Pfade von u nach v führen, dann enthält G einen Zyklus. Existiert notwendigerweise ein Zyklus von u nach u?

(c) Zeigen Sie: Falls G einen Zyklus enthält, so existiert ein Zyklus der Länge $\ell \leq 2 \operatorname{diam}(G) + 1$.
Hinweis: Widerspruchsbeweis: Nehmen Sie an, der kürzeste Zyklus hätte die Länge $\ell \geq 2 \operatorname{diam}(G) + 2$. Dann können Sie diesen in einen Pfad der Länge $\operatorname{diam}(G) + 1$ und einen der Länge $\ell - \operatorname{diam}(G) - 1 \geq \operatorname{diam}(G) + 1$ unterteilen.

(d) Finden Sie einen zusammenhängenden Graphen mit $\operatorname{diam}(G) = n$, dessen kürzester Zyklus die Länge $\ell = 2 \operatorname{diam}(G) + 1$ hat.

(e) Zeigen Sie: Haben alle Vertices v eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen einen Vertexgrad $d(v) \geq 2$, so enthält G einen Zyklus. **(2+2+2+1+2 Punkte)**

Aufgabe 63: Hier betrachten wir Bäume.

(a) Geben Sie alle Bäume mit $n \leq 4$ Vertices an.

(b) Zeigen Sie: Entfernt man eine Kante aus einem Baum, so ist der entstehende Graph nicht mehr zusamenhängend.

(c) Ein Vertex eines Baumes heißt Blatt, falls er den Grad 1 hat. Zeigen Sie, dass jeder Baum mit mindestens 2 Vertices mindestens ein Blatt hat.
Hinweis: Aufgabe 62(e).

(d) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass jeder Baum mit n Vertices genau $n - 1$ Kanten hat. **(1+1+1+1 Punkte)**

Abgabe bis zum 2.2.2017!