# 2. Aufgabenblatt

**Aufgabe 2.1.** (5 Punkte) Das Ziel dieser Aufgabe ist es die Herleitung der stereographischen Projektion $\varphi\colon S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit der $xy$-Ebene in $\mathbb{R}^3$. Die Einheitssphäre is kanonisch in $\mathbb{R}^3$ eingebettet.

a) Machen Sie eine Skizze von $\mathbb{C}$ und $S^2$. Wählen Sie einen Punkt auf der Sphäre, nicht den Nordpol, und zeichnen Sie die Gerade, die Nordpol und den gewählten Punkt verbindet. Wo ist der Schnittpunkt mit der Ebenen?

b) Beschreiben Sie die Gerade, die durch den Nordpol und einen Punkt $(a, b, c)$ auf der Sphäre geht. Finden Sie den Schnittpunkt mit der Ebene. Folgern Sie, dass die stereographische Projektion gegeben ist durch

$$\varphi(a,b,c) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } (a,b,c) = (0,0,1) \\ \dfrac{a+ib}{1-c} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

c) Umgekehrt, wenn $(a, b, 0)$ ein Punkt in der Ebene ist, beschreiben Sie die Gerade, die diesen Punkt mit dem Nordpol der Sphäre verbindet, und finden Sie den zweiten Schnittpunkt mit der Ebene. Folgern Sie, dass die Inverse der stereographischen Projektion gegeben ist durch

$$z \mapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \quad \text{and} \quad \infty \mapsto (0,0,1)\,.$$

d) Was ist ein Homöomorphismus? Warum ist $\varphi$ ein Homöomorphismus?

**Aufgabe 2.2.** (5 Punkte) Sei $f(z)$ eine in dem Gebiet $G$ holomorphe Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $f(\overline{z})$ is holomorph in $\overline{G}$,

b) $\overline{f(z)}$ is holomorph in $G$,

c) $\overline{f(\overline{z})}$ is holomorph in $\overline{G}$.

**Aufgabe 2.3.** (5 Punkte) Sei $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ die Möbiustransformation $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

a) Bestimmen Sie das Bild der reellen Achse.

b) Bestimmen Sie das Bild der komplexen Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z| = 1$.

**Aufgabe 2.4.** (5 Punkte) Prüfen Sie, wo die gegebenen Funktionen komplex differenzierbar sind.

a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \operatorname{Re}(z)$

b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = xy + ixy$

c) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$