5. Aufgabenblatt

Aufgabe 5.1. (5 Punkte) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, geschlossene Kurve.

a) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)\gamma'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\gamma(t)^2$.

b) Zeigen Sie

$$\int_\gamma z\ dz = 0\,.$$

Aufgabe 5.2. (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Gegeben seien dazu die Kurven $\gamma_k\colon [0,1] \to \mathbb{C}$:

$$\gamma_1(t) = r\exp(-2\pi i t)\,, \quad \gamma_2(t) = -1 + 2ti\,, \quad \gamma_3(t) = t\exp(2\pi i t)\,.$$

a) $\int_{\gamma_1} z^2\ dz$

b) $\int_{\gamma_2} z^2\ dz$

c) $\int_{\gamma_3} z^2\ dz$

d) $\int_{\gamma_1} \mathrm{Im}(z)\ dz$

e) $\int_{\gamma_2} \mathrm{Im}(z)\ dz$

f) $\int_{\gamma_2} \exp(z)\ dz$

g) $\int_{\gamma_1} \overline{z}\ dz$

h) $\int_{\gamma_2} \overline{z}\ dz$

i) $\int_{\gamma_3} \overline{z}\ dz$

Aufgabe 5.3. (5 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\phi(\alpha) = b$ und $\phi(\beta) = a$. Zeigen Sie

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\ dz = -\int_\gamma f(z)\ dz\,.$$

Aufgabe 5.4. (5 Punkte) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmene, $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stetig differenzierbare Kurve. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\ dz = \lambda \int_\gamma f(z)\ dz + \mu \int_\gamma g(z)\ dz\,.$$

b) Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz\,,$$

wenn $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ für $a \le c \le b$.