8. Aufgabenblatt

Aufgabe 8.1. (5 Punkte) Seien $0 < a < b$ und

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad \gamma(t) = ae^{it}$$
$$\beta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad \beta(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)\,.$$

a) Skizzieren Sie die Kurven γ und β.

b) Folgern Sie, dass
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_\beta \frac{1}{z}\,dz\,.$$

c) Benutzen Sie b) um
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}$$
zu beweisen.

Aufgabe 8.2. (5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralformel für Kreisscheiben und deren Folgerung für höhre Ableitungen die folgenden Integrale. Die Kurve $\partial D_r(z_0)$ bezeichnet die positiv orientierte Kreislinie mit Radius r um z_0.

a) $\displaystyle\int_{\partial D_1(-1)} \frac{1}{z^2-1}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{z^2-1}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{\partial D_2(0)} \frac{\exp(z)}{z-i}\,dz$

d) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{(z-a)^2(z-b)^5}\,dz$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1 < |b|$.

Aufgabe 8.3. (5 Punkte) Überprüfen Sie, dass die folgenden Voraussetzungen in der Integralformel für Kreisscheiben notwending sind. Finden Sie jeweils ein Beispiel, sodass alle Voraussetzungen außer die genannte erfüllt sind und die Integralformel für Kreisscheiben nicht gilt.

a) U eine offene Kreisscheibe.

b) $\lim\limits_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z) = 0$ für $1 \leq j \leq n$.

Aufgabe 8.4. (5 Punkte) Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f(z) = \dfrac{1}{z}$ auf Ω holomorph ist.

b) Geben Sie eine glatte geschlossene Kurve γ in Ω, sodass $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$.

c) Was ist der Zusammenhang von a) und b) zum Satz von Morera.