

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 9.1. (5 Punkte) Finden Sie die Taylorreihe für die folgenden Funktionen um $z_0 = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

- a) e^z
- b) $\sin(z)$
- c) $\sinh(z)$
- d) $\frac{z}{(1-z)^2}$

Aufgabe 9.2. (5 Punkte)

- a) Finden Sie die Potenzreihe um $z_0 = 0$ der Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius q .
- b) Skizzieren Sie die Menge Ω , auf der $f(z)$ holomorph ist, und $B_q(0)$.
- c) Was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion $f(z)$ an einer beliebigen Stelle $z_0 \neq 1$?

Mit $B_r(z)$ bezeichnen wir den offene Ball mit Radius r um z .

Aufgabe 9.3. (5 Punkte) Wir definieren die folgende Potenzreihe um $z_0 = 1$:

$$l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n.$$

- a) Berechnen Sie den Konvergenzradius q dieser Reihe.
- b) Berechnen Sie $l'(z)$ für alle $z \in B_q(1)$.
- c) Zeigen Sie, dass für alle $z \in B_q(1)$ die Beziehung $e^{l(z)} = z$ gilt.

Aufgabe 9.4. (5 Punkte) Sei $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ mit stetiger Fortsetzung im Ursprung. Dann sind $B_n = f^{(n)}(0)$ die *Bernoulli-Zahlen*.

- a) Drücken Sie die Taylorreihe von f um den Ursprung mithilfe der Bernoulli-Zahlen aus.
- b) Zeigen Sie

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(e^z - 1)z^n} dz.$$

- c) Finden Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe in a).