Eine Bemerkung zum Normenresthomomorphismus $h\colon K^*F/2 \longrightarrow H^*(F,\mathbb{Z}/2)$

von Albrecht Pfister

11. März 2002

Abstract. An elementary Galois theoretic proof is given for the fact: An element $b \in \dot{F}$ is a norm from the extension $F(\sqrt{a})$ iff $(a) \cup (b) = 0$ in $H^2(F,\mathbb{Z}/2)$. From this it follows easily that h exists. Comments about other proofs and applications to quadratic forms conclude the paper.

1 Einleitung

Sei F ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, F_s eine separable Hülle von F, $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_s/F)$ die absolute Galoisgruppe von F versehen mit ihrer Topologie als kompakte proendliche Gruppe (Untergruppen von endlichem Index sind offen). Γ operiere trivial auf $\mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dazu gehören für alle $n \geq 0$ die folgenden abelschen Gruppen (genauer: Vektorräume über $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$):

$$\begin{array}{rcl}
C^n & = & \text{Gruppe aller stetigen Abbildungen von } \Gamma^n = \Gamma \underbrace{\times \cdots \times}_{n} \Gamma \\
 & & \text{nach } \mathbb{Z}/2 \ (n\text{-Koketten}) \\
Z^n & = & \{f \in C^n \colon df = 0\} \quad (n\text{-Kozyklen}) \\
B^n & = & dC^{n-1} \leq C^n \quad (n\text{-Koränder}) \\
H^n & = & Z^n/B^n = n\text{-te Kohomologiegruppe}
\end{array}$$

Dabei ist der Ableitungsoperator $d\colon C^n \longrightarrow C^{n+1}$ definiert durch:

$$(df)(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},\gamma_i\gamma_{i+1},\gamma_{i+2},\ldots,\gamma_{n+1}) \ ,$$

wobei Terme γ_i mit $i \leq 0$ bzw. $i > n+1$ weg zu lassen sind. (Da die Summanden in $\mathbb{Z}/2$ liegen, wäre natürlich auch der Vorzeichenfaktor $(-1)^i$ überflüssig.) Man rechnet trivial nach, dass $d \circ d = C^n \longrightarrow C^{n+2}$ die Nullabbildung ist, weshalb $B^{n+1} \leq \mathbb{Z}^{n+1}$ gilt.

Speziell haben wir:

$$\begin{array}{rcl}
C^0 & = & Z^0 = \text{ Gruppe der Abbildungen der einpunktigen Menge} \\
 & & \Gamma^0 \text{ nach } \mathbb{Z}/2, \text{ also } C^0 = \mathbb{Z}/2,\ B^0 = 0. \\
C^1 & = & \text{Abb. } (\Gamma,\mathbb{Z}/2),\ Z^1 = \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z}/2),\ B^1 = 0. \\
B^2 & = & \{dh \colon h \in C^1\} \text{ mit } (dh)(\gamma_1,\gamma_2) = h(\gamma_1) + h(\gamma_2) - h(\gamma_1\gamma_2)
\end{array}$$

Wegen $\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2 \cdot \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2$ liefert das Cup-Produkt der Kohomologietheorie Multiplikationen $\cup\colon C^p \times C^q \longrightarrow C^{p+q}$, $Z^p \times Z^q \longrightarrow Z^{p+q}$, $H^p \times H^q \longrightarrow H^{p+q}$, die in unserem Fall völlig elementar zu beschreiben sind:
Für $f \in C^p$, $g \in C^q$ setze man:

$$(f \cup g)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+q}) := f(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \cdot g(\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_{p+q})$$

Man rechne trivial nach, dass hierbei

$$d(f \cup g) = (df) \cup g + (-1)^p f \cup (dg) = (df) \cup g + f \cup (dg)$$

gilt. Also induziert $\cup$ auch bilineare Abbildungen $\cup\colon Z^p \times Z^q \longrightarrow Z^{p+q}$ und $\cup\colon H^p \times H^q \longrightarrow H^{p+q}$. Ferner ist klar, dass für $C^p \times C^q \times C^r \longrightarrow C^{p+q+r}$ das Assoziativgesetz $(f \cup g) \cup (h) = f \cup (g \cup h)$ gilt.

Wir setzen nun

$$H^* := H^*F := H^0 \oplus H^1 \oplus H^2 \oplus \cdots \ .$$

Versehen mit $\cup$ ist das eine $\mathbb{N}_0$-graduierte assoziative $\mathbb{F}_2$-Algebra, der "(mod 2)-Kohomologiering von F". Dieser Ring ist letztlich sogar kommutativ, wir brauchen aber nur, dass wenigstens die Multiplikation $\cup\colon H^1 \times H^1 \longrightarrow H^2$ kommutativ ist. Seien dazu $f, g \in Z^1$ und $\sigma, \tau \in \Gamma$. Definiere $h \in C^1$ durch $h(\sigma) := f(\sigma)g(\sigma)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(dh)(\sigma,\tau) &= h(\sigma\tau) - h(\sigma) - h(\tau) = f(\sigma\tau)g(\sigma\tau) - f(\sigma)g(\sigma) - f(\tau)g(\tau)\\ &= (f(\sigma)+f(\tau))(g(\sigma)+g(\tau)) - f(\sigma)g(\sigma) - f(\tau)g(\tau)\\ &= f(\sigma)g(\tau) + g(\sigma)f(\tau) = (f \cup g)(\sigma,\tau) + (g \cup f)(\sigma,\tau)\,,\end{aligned}$$

d. h. $f \cup g + g \cup f = f \cup g - g \cup f = dh \in B^2$. Also ist das induzierte Produkt $H^1 \times H^1 \longrightarrow H^2$ kommutativ.

Wir brauchen nun noch einige Bezeichnungen.
Wegen $H^1 = Z^1 = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/2)$ liefert jedes von 0 verschiedene Element χ von H^1 eine Untergruppe $\triangle = \ker \chi$ von Γ mit $[\Gamma\colon \triangle] = 2$. Nach der Galoistheorie gehört zu $\triangle$ ein quadratischer Erweiterungskörper $F(\sqrt{a})$ von F, so dass $\triangle$ die Fixgruppe von $F(\sqrt{a})$ ist. Hierdurch ist die Quadratklasse $\tilde{a} = a\dot{F}^2$ von $a \in \dot{F}$ eindeutig bestimmt. Für zwei Elemente $a, b \in \dot{F}$ schreiben wir auch $a \sim b$, wenn $\tilde{a} = \tilde{b}$ gilt. Genauer sieht man:

Die Zuordnungen: $\tilde{a} \in \dot{F}/\dot{F}^2 \longmapsto \triangle = \triangle_a$ Untergruppe von Γ vom Index ≤ 2

$$\longmapsto \chi_a \in H^1 \quad \text{mit } \ker \chi_a = \triangle_a$$

sind bijektiv und es gilt für $\sigma \in \Gamma$:

$$\chi_a(\sigma) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{falls } \frac{\sigma(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\ ,\ \text{ d. h. } \sigma \begin{matrix} \in \triangle_a \\ \notin \triangle_a \end{matrix}$$

Wegen $\frac{\sigma(\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} = \frac{\sigma(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sigma(\sqrt{b})}{\sqrt{b}}$ folgt außerdem:

$$\chi_{ab}(\sigma) = \chi_a(\sigma) + \chi_b(\sigma) \quad \text{in } \mathbb{Z}/2\,.$$

Insgesamt vermittelt die Bijektion $\tilde{a} \longmapsto \chi_a$ einen Isomorphismus der (multiplikativen) Quadratklassengruppe $\dot{F}/\dot{F}^2$ von F auf die (additive) Kohomologiegruppe $Z^1 = H^1 = H^1F$.

Bezeichnung: Fassen wir den 1-Kozykel χ_a als Element von H^1 auf, so schreiben wir kurz (a) anstelle von χ_a.

Ferner wird die Konjugation in einer (höchstens) quadratischen Körpererweiterung $F(\sqrt{a})/F$ mit $\bar{\ }$ und die Normengruppe mit $\dot{N}_a$ bezeichnet. Wir haben also: $\dot{N}_a = \{N\alpha = \alpha\overline{\alpha}\colon 0 \neq \alpha \in F(\sqrt{a})\}$. $\dot{N}_a$ ist eine Untergruppe von $\dot{F}$ (und enthält $\dot{F}^2$).

Hauptziel der Arbeit ist ein möglichst elementarer Beweis der Behauptung

$$\text{(0)} \qquad \text{Für } a, b \in \dot{F} \text{ gilt:} \quad b \in \dot{N}_a \Longleftrightarrow (a) \cup (b) = 0 \text{ in } H^2F$$

Das geschieht in den Abschnitten 2 und 3. In den daran anschließenden Abschnitten werden Folgerungen für die Existenz des Normenresthomomorphismus in der Milnorschen K-Theorie $(\mathrm{mod}\, 2)$ und für die Theorie der quadratischen Formen gezogen.

2 Die Behauptung $b \in \dot{N}_a \Longrightarrow (a) \cup (b) = 0$

Diese Behauptung ist trivial für $a \sim 1$ bzw. $b \sim 1$, da dann $(a) = 0$ bzw. $(b) = 0$ gilt. Sei daher $a \not\sim 1$, $b \not\sim 1$ und $b = N\alpha = \alpha\overline{\alpha}$ mit $\alpha \in F(\sqrt{a})$. Wegen $b \not\sim 1$ gilt $\alpha \notin F$, $\alpha \neq \overline{\alpha}$.

α (und $\overline{\alpha}$) sind keine Quadrate in $F(\sqrt{a})$, denn aus $\alpha = \beta^2$, $\overline{\alpha} = \overline{\beta^2}$ würde $b = (\beta\overline{\beta})^2$ mit $\beta\overline{\beta} \in \dot{F}$ folgen, also $b \sim 1$. Daher gilt: Der Körper $F(\sqrt{a}, \sqrt{\alpha}) = F(\sqrt{\alpha})$ hat den Grad 4 über F. Dabei seien $\sqrt{a}$, $\sqrt{\alpha}$ und anschließend $\sqrt{\overline{\alpha}}$ festgewählte Quadratwurzeln aus $a, \alpha, \overline{\alpha}$. Dadurch ist eine Quadratwurzel aus b festgelegt durch $\sqrt{b} := \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\overline{\alpha}}$. Setze $E := F(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\overline{\alpha}})$. Offensichtlich gilt: E enthält auch $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ und ist galoissch über F. E/F hat den Grad 4 oder 8, wobei $[E\colon F] = 4 \Longleftrightarrow \sqrt{\overline{\alpha}} \in F(\sqrt{\alpha}) \Longleftrightarrow \sqrt{b} \in F(\sqrt{\alpha})$. Genauer gilt folgendes:

Lemma 2.1 *1)* $b \sim a \Longleftrightarrow [E\colon F] = 4$

2) Für $\sigma \in \Gamma$ *und* $[E\colon F] = 4$ *ist* $\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ *vollständig durch* $\sigma(\sqrt{\alpha})$ *bestimmt. Ist dagegen* $[E\colon F] = 8$*, so ist* $\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ *durch* $\sigma(\sqrt{\alpha})$ *nur bis aufs Vorzeichen bestimmt.*

Beweis

1) Sei zunächst $b \sim a$, also $\sqrt{b} \in F(\sqrt{a})$. Dann gilt $\sqrt{\overline{\alpha}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\alpha}} \in F(\sqrt{\alpha})$, also $E = F(\sqrt{\alpha})$, $[E\colon F] = 4$. Ist umgekehrt $[E\colon F] = 4$, so folgt $\sqrt{\overline{\alpha}} \in F(\sqrt{a})(\sqrt{\alpha})$. Das impliziert $\overline{\alpha} \sim \alpha$ in $F(\sqrt{a})$, also $\overline{\alpha} = \alpha\gamma^2$ mit $\gamma \in F(\sqrt{a})$, also $b = \alpha\overline{\alpha} = (\alpha\gamma)^2$. Wegen $b \in F$ und $b \not\sim 1$ folgt $\alpha\gamma = x\sqrt{a}$ mit $x \in \dot{F}$, somit $b = x^2 a \sim a$.

2) Diese Behauptung ist klar, da die galoissche Erweiterung E/F genau so viele Automorphismen besitzt wie ihr Grad $[E\colon F]$ angibt. Nach dem Fortsetzungssatz für Isomorphismen werden sie alle von passenden Elementen σ aus Γ induziert. Genauer gilt im Fall $b \sim a$ noch:

$$\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{b} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \pm\sqrt{\overline{\alpha}}$$
$$\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\overline{\alpha}} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \Longrightarrow \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \mp\sqrt{\alpha}$$

Bemerkung:
Man zeigt leicht, dass die Galoisgruppe von E/F zyklisch von der Ordnung 4 bzw. isomorph zur Diedergruppe D_8 ist. Wir brauchen dieses Resultat aber nicht.

Satz 2.2

$$b \in \dot{N}_a \implies (a) \cup (b) = 0$$

Beweis
Gemäß der Einleitung bezeichnen wir die zu (a), $(b) \in H^1$ gehörigen 1-Kozyklen mit $f(\sigma) = \chi_a(\sigma)$, $g(\sigma) = \chi_b(\sigma)$ für $\sigma \in \Gamma$. Zu $(b) \cup (a)$ gehört dann der 2-Kozykel $g(\sigma)f(\tau)$. Es ist zu zeigen, dass $g(\sigma)f(\tau)$ ein 2-Korand $(dh)(\sigma,\tau)$ ist mit $h \in C^1$. Dann folgt in H^2: $(a) \cup (b) = (b) \cup (a) = 0$.

Definition

$$h(\sigma) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \sigma(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha} \text{ oder } \sigma(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\overline{\alpha}} \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad \sigma(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha} \text{ oder } \sigma(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}} \end{cases}$$

Da $h(\sigma)$ nur von der Einschränkung $\sigma\,|_{F(\sqrt{\alpha})}$ abhängt, ist $h\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ offensichtlich stetig, also $h \in C^1$.
Die Behauptung lautet nun:

(1) $$g(\sigma)f(\tau) = (dh)(\sigma,\tau) = h(\sigma) + h(\tau) - h(\sigma\tau) \quad \text{für alle } \sigma,\tau \in \Gamma.$$

Dafür dürfen wir wieder $a \not\sim 1$, $b \not\sim 1$ voraussetzen, d. h. die Homomorphismen f und g von Γ nach $\mathbb{Z}/2$ sind nicht trivial.

Kontrolle

I Sei zunächst $\tau(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha}$. Dann ist $\tau(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ und $f(\tau) = 0$. Zur Berechnung von $h(\sigma)$ und $h(\sigma\tau)$ genügt es nun, $\sigma(\sqrt{\alpha})$ zu kennen. Das ergibt insgesamt 8 Fälle:

1) Ist $\tau(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$, so folgt $h(\tau) = 0$ und $h(\sigma) = h(\sigma\tau)$, also $h(\sigma) + h(\tau) - h(\sigma\tau) = 0 = g(\sigma)f(\tau)$ in $\mathbb{Z}/2$.
2) Ist $\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha}$, so folgt $h(\tau) = 1$ und $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sigma(\sqrt{\alpha})$, also $h(\sigma) \neq h(\sigma\tau)$. Das ergibt wieder $h(\sigma) + h(\tau) - h(\sigma\tau) = 0$ in $\mathbb{Z}/2$.

II Sei nun $\tau(\sqrt{\alpha}) = \mp\sqrt{\overline{\alpha}}$. Dann ist $\tau(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ und $f(\tau) = 1$. Hier muss man zur Berechnung von $h(\sigma)$ und $h(\sigma\tau)$ sowohl $\sigma(\sqrt{\alpha})$ wie auch $\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ kennen. Das ergibt für $[E\colon F] = 8$ insgesamt 16 Fälle, denn durch $\sigma(\sqrt{\alpha})$ ist $\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ jedenfalls schon bis aufs Vorzeichen bestimmt. Für $[E\colon F] = 4$ treten allerdings nach dem Lemma nur die Hälfte der Fälle auf.

1) Ist $\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\overline{\alpha}}$, so folgt $h(\tau) = 0$, $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ und $(dh)(\sigma,\tau) = h(\sigma) - h(\sigma\tau) \neq 0 \Longleftrightarrow h(\sigma) \neq h(\sigma\tau)$
   a) $\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha}$ und $h(\sigma) \neq h(\sigma\tau) \Longrightarrow -\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \pm\sqrt{\overline{\alpha}} \Longrightarrow$
   $$\sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \Longrightarrow g(\sigma) = 1$$
   b) $\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\overline{\alpha}}$ und $h(\sigma) \neq h(\sigma\tau) \Longrightarrow -\sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \pm\sqrt{\alpha} \Longrightarrow$
   $$\sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \Longrightarrow g(\sigma) = 1$$
   Es folgt: Von den 8 Fällen mit $\tau(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\overline{\alpha}}$ gilt $(dh)(\sigma,\tau) = 1$ in genau 4 Fällen und diese stimmen mit den 4 Fällen überein, in denen $g(\sigma) = 1$ ist. Daher gilt hier immer:
   $$(dh)(\sigma,\tau) = g(\sigma) = g(\sigma)f(\tau)$$
2) Ist $\tau(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}}$, so folgt $h(\tau) = 1$, $\sigma\tau(\sqrt{\alpha}) = \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}})$ und $(dh)(\sigma,\tau) = 1 + h(\sigma) - h(\sigma\tau) \neq 0 \Longleftrightarrow h(\sigma) = h(\sigma\tau)$
   a) $\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha}$ und $h(\sigma) = h(\sigma\tau) \Longrightarrow \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \mp\sqrt{\overline{\alpha}} \Longrightarrow$
   $$\sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \Longrightarrow g(\sigma) = 1$$
   b) $\sigma(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\overline{\alpha}}$ und $h(\sigma) = h(\sigma\tau) \Longrightarrow \sigma(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \mp\sqrt{\alpha} \Longrightarrow$
   $$\sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \Longrightarrow g(\sigma) = 1$$
   Wie unter 1) folgt die Behauptung $(dh)(\sigma,\tau) = g(\sigma)$. Damit ist Satz 2.2 bewiesen.

3 Die Behauptung $(a) \cup (b) = 0 \Longrightarrow b \in \dot{N}_a$

Wir kommen nun zur Umkehrung von Satz 2.2. Auch dieser Beweis ist einfach und elementar.

Satz 3.1

$$(a) \cup (b) = 0 \quad \Longrightarrow b \in \dot{N}_a$$

Beweis
Für $a \sim 1$ ist $F(\sqrt{a}) = F$, $\dot{N}_a = \dot{F}$, also $b \in \dot{N}_a$. Für $b \sim 1$ ist $b = c^2 = Nc$ mit $c \in F \subset F(\sqrt{a})$ für alle $a \in \dot{F}$. Sei also wieder $a \not\sim 1$, $b \not\sim 1$. Nach Voraussetzung existiert $h \in C^1$ mit

$$(2) \qquad (dh)(\sigma, \tau) = h(\sigma) + h(\tau) - h(\sigma\tau) = g(\sigma)f(\tau)$$

Seien Γ_a bzw. Γ_b die Fixgruppen zu den quadratischen Erweiterungskörpern $F(\sqrt{a})$ bzw. $F(\sqrt{b})$. Es gibt $[\Gamma\colon \Gamma_a] = [\Gamma\colon \Gamma_b] = 2$ und $\Gamma_a = \Gamma_b \Longleftrightarrow a \sim b$. Für $a \not\sim b$ ist $\Gamma_a \cap \Gamma_b$ als Fixgruppe von $F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ein Normalteiler vom Index 4 in Γ. Da $F(\sqrt{a}, \sqrt{b})/F$ in jedem Fall einen Automorphismus besitzt, der weder $\sqrt{a}$ noch $\sqrt{b}$ festläßt, gibt es nach dem Fortsetzungssatz ein Element $\sigma_1 \in \Gamma$ mit $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ und $\sigma_1(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}$, also $f(\sigma_1)g(\sigma_1) = 1$. Mit (2) folgt:

$$(3) \qquad (dh)(\sigma_1, \sigma_1) = h(\sigma_1^2) = 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}/2$$

Da andererseits für $\tau = 1 \in \Gamma$ stets

$$(dh)(\sigma, 1) = h(1) + h(\sigma) - h(\sigma) = g(\sigma)f(1) = 0$$

gilt, ist $h(1) = 0$. Insbesondere muss $\sigma_1^2 \neq 1$ sein. Klar ist auch: $\sigma_1 \notin \Gamma_a$, $\sigma_1^2 \in \Gamma_a$.
Für $\sigma, \tau \in \Gamma_a$ ist $g(\sigma)f(\tau) = 0$, daher $h(\sigma\tau) = h(\sigma) + h(\tau)$. Das bedeutet: $h\,|_{\Gamma_a}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von Γ_a nach $\mathbb{Z}/2$. Wegen $h(\sigma_1^2) = 1$ ist er surjektiv. Setze $\triangle := \ker(h\,|_{\Gamma_a})$. Dann ist $[\Gamma_a\colon \triangle] = 2$. Der zu $\triangle$ gehörige Fixkörper hat die Gestalt $F(\sqrt{a}, \sqrt{\alpha})$ mit $\alpha \in F(\sqrt{a})$ und $\alpha \not\sim 1$ in $F(\sqrt{a})$. Dadurch ist die Quadratklasse von α in $F(\sqrt{a})$ vollständig bestimmt. Sei $\overline{\alpha}$ die Konjugierte von α in $F(\sqrt{a})$. Für das Element $\sigma_1 \in \Gamma$ gilt dann: $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$, $\sigma_1(\alpha) = \overline{\alpha} \neq \alpha$ und $\sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}}$ bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{\overline{\alpha}}$.

Allgemein gelten für $\sigma \in \Gamma$ noch die Regeln

$$(4) \qquad h(\sigma) + h(\sigma^{-1}) = g(\sigma)f(\sigma^{-1}) = g(\sigma)f(\sigma)$$

$$(5) \qquad h(\sigma) + h(\sigma^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow \sigma\,|_{F(\sqrt{a},\sqrt{b})} = \sigma_1\,|_{F(\sqrt{a},\sqrt{b})}$$

Aus $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$, $\sigma_1(\alpha) = \overline{\alpha} \neq \alpha$ folgt auch noch $\alpha \notin F$ und $\sigma_1^2(\sqrt{\alpha}) = \sigma_1(\sqrt{\overline{\alpha}}) = -\sqrt{\alpha}$, da $\sigma_1^2 \notin \triangle$. Mit $\sigma_1^4 \in \triangle$ erhalten wir

$$(6) \qquad \Gamma = \dot{\bigcup_{i \bmod 4}} \sigma_1^i \triangle\,, \quad \Gamma_a = \triangle \,\dot{\cup}\, \sigma_1^2 \triangle$$

$\triangle$ muss aber kein Normalteiler von Γ sein!

Nach (4) ist $h(\sigma_1)+h(\sigma_1^{-1})=1$. Indem man eventuell noch σ_1 und σ_1^{-1} vertauscht, gilt daher ohne Einschränkung

$$h(\sigma_1)=1\,,\quad h(\sigma_1^{-1})=0 \tag{7}$$

Für $\delta\in\triangle$ gilt nach Konstruktion $h(\delta)=f(\delta)=0$, also mit (2)

$$h(\sigma)-h(\sigma\delta)=0 \qquad \text{für alle } \sigma\in\Gamma \tag{8}$$

Damit ist $h(\gamma)$ für ein beliebiges Element $\gamma=\sigma_1^i\delta\in\Gamma$ (mit $i \bmod 4$, $\delta\in\triangle$) bestimmt, nämlich

$$h(\gamma)=0 \quad \text{für } i\equiv 0,-1 \quad \text{und } h(\gamma)=1 \text{ für } i\equiv 1,2 \bmod 4$$

(Vergleiche die Definition von h im Beweis von Satz 2.2)

Wir können nun zeigen, dass das Element $\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}\in F_s$ unter allen Automorphismen $\sigma\in\Gamma$ fest bleibt.

I Sei $\sigma=\delta\in\triangle$

Hier müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

1) $\delta\sigma_1=\sigma_1\delta'\in\sigma_1\triangle$. Dann gilt:

$$h(\delta\sigma_1)=h(\sigma_1)=1\,,\ g(\delta)=g(\delta)f(\sigma_1)=h(\delta)+h(\sigma_1)-h(\delta\sigma_1)=0$$

Daraus folgt:

$$\delta(\sqrt{\overline{\alpha}})=\delta\sigma_1(\sqrt{\alpha})=\sigma_1\delta'(\sqrt{\alpha})=\sigma_1(\sqrt{\alpha})=\sqrt{\overline{\alpha}}\,,$$
$$\delta(\sqrt{\alpha})=\sqrt{\alpha},\ \delta(\sqrt{b})=\sqrt{b},\ \text{also } \delta\left(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}\right)=\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$$

2) $\delta\sigma_1=\sigma_1^{-1}\delta'\in\sigma_1^{-1}\triangle$. Hier gilt:

$$h(\delta\sigma_1)=h(\sigma_1^{-1})=0\,,\ g(\delta)=1\,.$$

Damit folgt:

$$\delta(\sqrt{\overline{\alpha}})=\delta\sigma_1(\sqrt{\alpha})=\sigma_1^{-1}(\sqrt{\alpha})=\sigma_1^3(\sqrt{\alpha})=\sigma_1^2(\sqrt{\overline{\alpha}})=-\sqrt{\overline{\alpha}}\,,$$
$$\delta(\sqrt{\alpha})=\sqrt{\alpha},\ \delta(\sqrt{b})=-\sqrt{b},\ \text{ also wieder } \delta\left(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}\right)=\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}\,.$$

II Sei $\sigma = \sigma_1$

Hier ist nach Konstruktion $\sigma_1(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\overline{\alpha}}$, $\sigma_1(\sqrt{\overline{\alpha}}) = \sigma_1^2(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha}$ und $\sigma_1(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}$, woraus ebenfalls $\sigma_1\left(\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}\right) = \sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$ folgt.

Wegen (6) bleibt also $\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{b}}$ bei allen Automorphismen von F_s/F fest. Nach der Galoistheorie folgt: $b \sim N\alpha = \alpha\overline{\alpha}$ in F, $b \in \dot{N}_a$.
Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

4 Der Normenresthomomorphismus $(\bmod 2)$

Wir brauchen zunächst die Definition des (großen und kleinen) Milnor-Rings von F, die ich direkt aus der Originalarbeit von Milnor [Mi1] übernehme. Sei $K_1 = K_1F$ ein additiv geschriebenes Exemplar der multiplikativen Gruppe $\dot{F} = F \setminus \{0\}$. Mit anderen Worten: Sei $l\colon \dot{F} \longrightarrow K_1$ ein Gruppenhomomorphismus mit $l(ab) = l(a) + l(b)$. Sei weiter T die Tensoralgebra des $\mathbb{Z}$-Moduls K_1, d. h.

$$T = \mathbb{Z} \oplus K_1 \ \oplus (K_1 \otimes K_1) \ \oplus (K_1 \otimes K_1 \otimes K_1) \oplus \cdots \ ,$$

und sei J das homogene zweiseitige Ideal von T, welches von den Elementen

$$l(a) \otimes l(1-a) \ \in K_1 \otimes K_1 \qquad (1 \neq a \in \dot{F})$$

erzeugt wird.

Definition

1) Der Faktorring $K_* = K_*F = T/J$ heißt (großer) Milnorring. Da K_* wie T $\mathbb{N}_0$-graduiert ist, haben wir eine natürliche Komponentenzerlegung

$$K_* = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots$$

mit $\mathbb{Z}$-Moduln $K_0 = \mathbb{Z}$, $K_1 = l(\dot{F})$, $K_2 = K_1 \otimes K_1/(K_1 \otimes K_1) \cap J, \ldots$.

2) Der Faktorring $k_* = k_*F = K_*F/2K_*F$ heißt kleiner oder $(\bmod 2)$ Milnorring.

Hierbei ist klar, dass $k_* = k_0 \oplus k_1 \oplus k_2 \oplus \cdots$ eine $\mathbb{N}_0$-graduierte $\mathbb{Z}/2$-Algebra ist mit

$$k_0 = H^0 = \mathbb{Z}/2\,, \ \ k_1 = H^1 \cong \dot{F}/\dot{F}^2\,, \ \ k_2 = K_2/2, \ldots .$$

Bezeichnung
Für $a \in \dot{F}$ wird das Element $l(a) \bmod 2$ von k_1 kurz mit $\{a\}$ bezeichnet. Es gilt also:

$$\{a\} = 0 \Longleftrightarrow a \sim 1 \in \dot{F}\,, \ \ 2\{a\} = 0 \quad \text{für alle } a \in \dot{F}\,,$$
$$\{ab\} = \{a\} + \{b\}$$

Lemma 4.1 *1) Für $\xi \in K_m$, $\eta \in K_n$ gilt $\eta\xi = (-1)^{mn}\xi\eta \in K_{m+n}$*

2) Der Ring k_* ist kommutativ

Beweis

1) Da K_* von K_1 erzeugt wird, genügt es den Fall $m = n = 1$ zu betrachten. Für $a \neq 1$ gilt:

$$-a = \frac{1-a}{1-a^{-1}} \qquad \in F$$

$$\begin{aligned} l(a)l(-a) &= l(a)l(1-a) - l(a)l(1-a^{-1}) \\ &= l(a)l(1-a) + l(a^{-1})l(1-a^{-1}) \qquad \in J \end{aligned}$$

Für $\xi = l(a)$, $\eta = l(b)$ folgt dann in $K_1 \otimes K_1$:

$$\begin{aligned} &\xi\eta + \eta\xi \equiv l(a)l(-a) + l(a)l(b) + l(b)l(a) + l(b)l(-b) \\ &\equiv l(a)l(-ab) + l(b)l(-ab) \equiv l(ab)l(-ab) \equiv 0 \bmod J\,, \end{aligned}$$

also $\xi\eta + \eta\xi = 0$ in K_2.

2) folgt direkt aus 1)

Nun können wir die Existenz des Normenresthomomorphismus leicht zeigen.

Satz 4.2

Der natürliche Gruppenisomorphismus $h_1 \colon k_1 \longrightarrow H^1$ mit $h_1(\{a\}) := (a)$ für $a \in \dot{F}$ induziert einen graduierten Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}/2$-Algebren

$$h \;:\; k_* \longrightarrow H^*$$

Er heißt Normenresthomomorphismus (mod 2).

Beweis

Zunächst induziert h_1 für alle $n \geq 1$ multilineare Abbildungen

$$h_n \colon k_1 \underbrace{\times \cdots \times}_{n} k_1 \longrightarrow H^n$$

mit $h_n(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) := (a_1) \cup \cdots \cup (a_n)$. (Für $n = 0$ ist $k_0 = H^0 = \mathbb{Z}/2$ und $h_0 \colon k_0 \longrightarrow H^0$ die Identität.)

Wegen der universellen Eigenschaft der Tensorprodukte induzieren diese Abbildungen einen kanonischen graduierten Ringhomomorphismus $\tilde{h}$ von

$$\begin{aligned} &T/2T = k_0 \oplus k_1 \oplus (k_1 \otimes k_1) \oplus \cdots \\ &\text{nach } \; H^* = H^0 \oplus H^1 \oplus H^2 \oplus \cdots \;. \end{aligned}$$

Um daraus den gewünschten Homomorphismus $h\colon k_* \longrightarrow H^*$ zu gewinnen, ist dann nur noch zu zeigen, dass $\tilde{h}$ auf den Erzeugern von J verschwindet. Das bedeutet: Für $1 \neq a \in \dot{F}$ muss $\tilde{h}(\{a\} \otimes \{1-a\}) = (a) \cup (1-a)$ verschwinden. Da $1 - a = (1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}) = N(1+\sqrt{a})$ ist, folgt diese Behauptung direkt aus Satz 2.2.

Bemerkung
Satz 3.1 wird zur Konstruktion von h nicht benötigt.

5 Bemerkungen zur Literatur

1. Bekanntlich kommen die Potenzrest- und Normenrestsymbole und zugehörige Homomorphismen aus der Zahlentheorie, wo sie insbesondere in der lokalen und globalen Klassenkörpertheorie eine große Rolle spielen. Soweit ich feststellen konnte, wurde die Behauptung (0) der Einleitung (d. h. die Sätze 2.2 und 3.1 bzw. sogar ihre Verallgemeinerung zum Normenresthomomorphismus mod N für einen *beliebigen* Körper F mit $\operatorname{char} F \nmid N$) zum ersten Mal in Serre's Buch "Corps locaux" (1. Auflage von [Se], 1962) aufgestellt und bewiesen. Zum Beweis werden folgende Dinge benötigt:

    1. Die Definition der Kohomologiegruppen von endlichen und proendlichen Gruppen G mit Werten in G-Moduln, insbesondere der Galois-Kohomologiegruppen $H^i(F,\cdot) = H^i(\Gamma,\cdot)$ eines Körpers F.
    2. Die lange exakte Kohomologiesequenz zu einer kurzen exakten Sequenz von G-Moduln.
    3. Induzierte G-Moduln und das Lemma von Shapiro, welches Beweise durch "Dimensionsverschiebung" erlaubt.
    4. Zu einer endlichen Körpererweiterung E/F die induzierten Abbildungen $\operatorname{res}_i\colon H^i(F,\cdot) \longrightarrow H^i(E,\cdot)$ (Restriktion) und $\operatorname{cor}_i\colon H^i(E,\cdot) \longrightarrow H^i(F,\cdot)$ (Corestriktion oder Transfer).
    5. Definition des Cup-Produkts $\cup\colon H^p(\Gamma, A) \times H^q(\Gamma, B) \longrightarrow H^{p+q}(\Gamma, A \otimes B)$ samt einigen Regeln.
    6. Die Projektionsformel (oder Frobenius-Reziprozität)

    $$\operatorname{cor}_{p+q}(f \cup \operatorname{res}_q g)_E = (\operatorname{cor}_p f) \cup g$$

    für $f \in H^p(E, A)$, $g \in H^q(F, B)$, jedenfalls für $p = q = 1$.
    7. Kummer-Theorie für den Körper F.
    8. Die Formel $H^1(F, \dot{F}_s) = 0$ von E. Noether, meistens "Satz 90 von Hilbert" genannt.
    9. Charaktere von Γ, d. h. die Gruppe $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
    10. Die Isomorphie $\operatorname{Br}(F) \cong H^2(F, \dot{F}_s)$, wobei $\operatorname{Br}(F)$ die Brauergruppe von F ist.

Siehe hierzu insbesondere die Kapitel 10 und 14 von [Se].

2. Milnor's Originalbeweis von Satz 3 in [Mi1], §6 besteht bei konsequenter Durchführung aus den folgenden Schritten:

   1' $b \in \dot{N}_a \Longleftrightarrow$ die quadratische Form $< 1, -a, -b >$ ist isotrop über F.

   2' $< 1, -a, -b >$ isotrop $\Longleftrightarrow \ll a, b \gg = < 1, -a, -b, ab >$ isotrop.

   3' $\ll a, b \gg$ isotrop $\Longleftrightarrow$ die Quaternionenalgebra $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ *zerfällt*, d. h. ist isomorph zu $M_2(F)$.

   4' Die Klasse von $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ in $\mathrm{Br}(F)$ ist ein Element der Ordnung ≤ 2, d. h. liegt in der Untergruppe ${}_2\,\mathrm{Br}(F)$.

   5' Bei der obigen Isomorphie 10. gilt ${}_2\,\mathrm{Br}(F) \cong H^2(F, \mu_2)$ mit $\mu_2 = \{1, -1\}$.

   6' Bei der Isomorphie der (multiplikativen) Gruppe $H^2(F, \mu_2)$ mit unserer additiven Gruppe $H^2(F, \mathbb{Z}/2) = H^2$ geht $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ in das Element $(a) \cup (b)$ über.

   Dabei sind die Schritte 1' bis 4' ziemlich einfach und wohlbekannt. Dagegen erfordern 10. und 5' die Wedderburn-Theorie der zentraleinfachen Algebren einschließlich des Satzes von Skolem-Noether und umfangreiche Rechnungen mit Faktorensystemen. Auch 6' ist keineswegs trivial.

3. Letzteres liegt daran, dass unter der Isomorphie 10. die Algebra $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ zunächst in einen 2-Kozykel mit Werten in $\dot{F}_s$ abgebildet wird, wobei Γ nichttrivial auf $\dot{F}_s$ operiert. Dieser 2-Kozykel muss umgeschrieben werden in einen anderen 2-Kozykel mit Werten in μ_2, wobei jetzt Γ trivial auf μ_2 operiert. Dabei wird auch benötigt, dass die Abbildung $H^2(F, \mu_2) \longrightarrow H^2(F, \dot{F}_s)$ injektiv ist, was aus 2., 7. und 8. folgt. Siehe [KMRT], Prop. 30.4 oder [Se], Chapter XIV, Prop. 5.

   Bei dem hier gegebenen Beweis der Sätze 2.2 und 3.1 spiegelt sich dieses Problem darin wider, dass sehr viel mit Quadratwurzeln $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{\alpha}$ und ihren Vorzeichen gearbeitet wird. Die (vorausgesetzte bzw. zu beweisende) Gleichung $b = \alpha\overline{\alpha}$ entspricht in 6. bzw. 6' der Formel

   $$(b) \cup (a) = \mathrm{cor}_2((\alpha) \cup \mathrm{res}_1(a))$$

   für die Körpererweiterung $F(\sqrt{a})/F$. Hier verschwindet die rechte Seite, da $\mathrm{res}_1(a)$ $= (\sqrt{a}^2) = 2(\sqrt{a}) = 0$ ist.

4. Ein anderer rein kohomologischer Beweis der Sätze 2.2 und 3.1 ergibt sich so: Man zeige zuerst, dass für $0 \neq \alpha \in F(\sqrt{a})$ die Beziehung $\mathrm{cor}_1(\alpha) = (N\alpha)$ gilt. (Ein rechnerischer Beweis mit Kozykeln erfordert etwa 2 Seiten.) Dann wende man die exakte Sequenz aus [Ar1], Cor. 4.6 an und erhalte die Behauptung $(a) \cup (b) = 0 \Longleftrightarrow b \in \dot{N}_a$.

5. Ein Großteil der genannten Einzelresultate findet sich auch in anderen Arbeiten und Büchern, z. B. 1. - 6. in [A-W], 7.-10. in [Dr], Part II, [Ke], Kap. III und IV, [Lo], §29 + 30 und [KMRT], Chapter VII, insbes. §30 + 31.

6. Für den Fall $\mu_N < F$ werden zur Definition des Normenresthomomorphismus $\mathrm{mod}\, N$, also des kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$h_N\colon K_2/NK_2 \longrightarrow {}_N\,\mathrm{Br}(F) \otimes \mu_N$$

in [Mi2], §14 + 15 und [Ke], §17 -19 anstelle oder parallel zur Projektionsformel auch "Normenrestalgebren" (a, b, ζ_N) und ihre Eigenschaften studiert [Für $n = 2$ ist $(a, b, -1) = \left(\frac{a,b}{F}\right)$].

7. Tate macht in [Ta2] einige interessante Ausführungen zur Galoiskohomologie und gibt eine direkte Definition von $\mathrm{cor}_p\, f$ für einen p-Kozykel f an. Er erwähnt dabei insbesondere, dass ein direkter Beweis der Regeln für das Cup-Produkt und der Projektionsformel (6) ohne Benützung von Dimensionsverschiebung "very tedious" sei. Ich habe das für $[E\colon F] = 2$ und $p = q = 1$ explizit durchgeführt, selbst dieser Fall wird schon schrecklich. Ferner beweist Tate in dieser Arbeit den schon in [Ta1] aufgestellten Hauptsatz: Für jeden globalen Körper F und jede natürliche Zahl N mit $\mathrm{char}\, F \nmid N$ ist $h_2\colon K_2F \longrightarrow H^2(F, \mu_N^{\otimes 2})$ surjektiv mit dem genauen $\mathrm{Kern}(K_2F)^N$ (wobei er K_2F multiplikativ schreibt). Bekanntlich haben Merkurjev-Suslin [M-S] gezeigt, dass dieser Hauptsatz sogar für jeden Körper F gilt. Der Beweis ist dann allerdings noch deutlich schwieriger.

6 Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen

Der hier gegebene Beweis der Sätze 2.2 und 4.2 eröffnet eine Alternative zum üblichen Aufbau einer Vorlesung über quadratische Formen. Man lasse die gesamte Theorie der einfachen zentralen Algebren, Clifford-Algebren und der Brauergruppe (in ihrer klassischen Form) weg. Nach einem Studium des Wittrings $W = WF$ mit seiner Filtrierung

$$W \supset I \supset I^2 \supset \cdots$$

sowie des graduierten Wittrings $\hat{W} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$ kann man dann direkt die Kohomologiegruppen $H^n = H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ einführen und nach "kohomologischen Invarianten" $e_n\colon I^n \longrightarrow H^n$ suchen. Diese Vorgehensweise ist bereits in der Dissertation von Arason [Ar1] angelegt. Dort wird insbesondere gezeigt, dass e_n auf der Teilmenge $P_n = \{\ll a_1, \ldots, a_n \gg = < 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n >\colon a_i \in \dot{F}\} < I^n$ wohldefiniert ist vermöge

$$e_n(\ll a_1, \ldots, a_n \gg) = (a_1) \cup \cdots \cup (a_n)\,.$$

Siehe hierzu und für das folgende auch [Pf].

Als nächstes führe man wie in Abschnitt 4 die Milnor'schen Gruppen K_n und $k_n = K_n/2$ ein und konstruiere den Normenresthomomorphismus $h = \oplus h_n\colon k_* \longrightarrow H^*$. Ferner zeige man wie in [Mi1] oder [Pf] die Existenz von kanonischen Epimorphismen

$$s_n\colon k_n \longrightarrow I^n/I^{n+1}$$

mit $s_n(\{a_1\}\cdot\ldots\cdot\{a_n\}) :=\ll a_1,\ldots,a_n \gg \bmod I^{n+1}$. Damit erhält man die "Milnor-Dreiecke"

$$\begin{tikzcd} & k_n \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[dr, "h_n"] & \\ I^n/I^{n+1} \arrow[rr, dotted, "\overline{e}_n"'] & & H^n \end{tikzcd}$$

wobei aber die Existenz der Gruppenhomomorphismen $\overline{e}_n$ noch nicht gesichert ist. Hieraus ergeben sich sofort die wesentlichen (miteinander gekoppelten) Fragen der Theorie:

- Läßt sich die Abbildung $e_n\colon P_n \longrightarrow H^n$ zu einem Gruppenhomomorphismus $e_n\colon I^n \longrightarrow H^n$ mit $I^{n+1} < \ker e_n$ fortsetzen?
- Ist s_n bijektiv (1. Milnor-Vermutung)?
- Ist h_n bijektiv (2. Milnor-Vermutung)?

In einer Vorlesung wäre man sicher zufrieden, wenn man sie außer für die trivialen Fälle $n = 0, 1$ auch für $n = 2$ positiv beantworten könnte. Dazu sollte man zuerst die in [Mi1] bewiesene Bijektivität von s_2 zeigen, die sofort die Existenz der 2. kohomologischen Invariante $\overline{e}_2 = h_2 \circ s_2^{-1}$ impliziert. Milnor benutzt dazu den Witt-Grothendieck-Ring und die Stiefel-Whitney-Invariante w_2. Man kann diesen Beweis leicht so modifizieren, dass man vollständig mit gewöhnlichen quadratischen Formen auskommt: Wie in [Pf] sei $S = SF$ der Halbring der (Äquivalenzklassen von) quadratischen Formen über F. Für $q = < a_1, \ldots, a_n >$ setze man

$$w_1(q) := \{a_1\} + \cdots + \{a_n\} = \{a_1 \cdots a_n\} = \{\det q\} \in k_1$$

und

$$w_2(q) := \sum_{i<j} \{a_i\}\cdot\{a_j\} \quad \in k_2$$

Diese Abbildungen sind (nach dem Kettenäquivalenzsatz von Witt) wohldefiniert. Weiter setze man:

$$S^2 = \{q \in S\colon\ \dim q = 2m \ \text{ gerade}\,,\ \ \operatorname{dis} q = (-1)^m \det q = 1\}$$

und

$$\widetilde{w}_2(q) := w_2(q) + \left[\frac{m}{2}\right]\{-1\}\{-1\} \quad \in k_2 \quad \text{für } q \in S^2\,.$$

Dann zeigt man leicht:

- $\widetilde{w}_2(q \oplus < 1, -1 >) = \widetilde{w}_2(q)$,
  $\widetilde{w}_2$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{w}_2 \colon I^2 \longrightarrow k_2$.
- $I^3 \subset \ker \widetilde{w}_2$.
- Der induzierte Gruppenhomomorphismus $\widetilde{w}_2 \colon I^2/I^3 \longrightarrow k_2$ ist die Umkehrabbildung zu s_2. Insbesondere ist s_2 ein Isomorphismus.

Durch die eingesparte Zeit kann man dann vielleicht noch eines der folgenden Ergebnisse behandeln.

- Die Existenz der Invariante $e_3 \colon I^3 \longrightarrow H^3$ nach [Ar1].
- Den fundamentalen Satz von Merkurjev [Me], dass $h_2 \colon k_2 \longrightarrow H^2$ (und damit auch $\overline{e}_2$) ein Isomorphismus ist, etwa in der elementarisierten Form von [Ar2] oder [Wa] oder [Ke], Kap. V.

Literatur

[Ar1] J.K. Arason: *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen.* J. Algebra **36**, 448–491 (1975)

[Ar2] J.K. Arason: *A proof of Merkurjev's theorem.* Can. Math. Soc. Conf. Proc., vol **4**, 121–130 (1984)

[A-W] M.F. Atiyah – C.T.C. Wall: *Cohomology of Groups.* Chapter IV = p. 94–115 in: J.W.S. Cassels – A. Fröhlich (ed.): Algebraic Number Theory. Acad. Press, London 1967

[Dr] P.K. Draxl: *Skew Fields.* Cambridge Univ. Press 1983

[Ke] I. Kersten: *Brauergruppen von Körpern.* Vieweg, Wiesbaden 1990

[KMRT] M.–A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.–P. Tignol: *The Book of Involutions.* AMS Publ., Providence 1998

[Lo] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra, Teil II.* B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990

[Me] A.S. Merkurjev: *On the norm residue symbol of degree 2* (in Russian). Dokl. Acad. Nauk USSR **261**, 542–547 (1981); English transl.: Soviet Math. Doklady **24**, 546–551 (1981)

[M-S] A.S. Merkurjev – A.A. Suslin: *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm-residue homomorphism (in Russian).* Izv. Acad. Nauk USSR **46**, 1011–1046 (1982); English transl.: Math. USSR Izv. **21**, 307–340 (1983)

[Mi1] J. Milnor: *Algebraic K-theory and quadratic forms.* Invent. math. **9**, 318–344 (1970)

[Mi2] J. Milnor: *Introduction to algebraic K-theory.* Annals of Math. Studies **72**, Princeton Univ. Press 1971

[Pf] A. Pfister: *On the Milnor Conjectures: History, Influence, Applications.* Jber. d. Dt. Math.-Verein **102**, 15-41 (2000)

[Se] J.-P. Serre: *Corps locaux.* Hermann, Paris 1962

[Ta1] J. Tate: *Symbols in Arithmetic.* Actes Congrès intern. math. 1970, Tome 1, 201–211. Gauthier-Villars, Paris 1971

[Ta2] J. Tate: *Relations between K_2 and Galois cohomology.* Invent. math. **36**, 257–274 (1976)

[Wa] A.R. Wadsworth: *Merkurjev's elementary proof of Merkurjev's theorem.* Contemp. Math. **55**, Part II, 741–776 (1986)