# ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

**ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΜΑΝΟΥΣΟΣ**

**2014**

# *ΓΕΝΙΚΑ*

Το κύριο χαρακτηριστικό της ερευνητικής μου δουλειάς είναι η χρήση ασυμτωτικών μεθόδων και οριακών συνόλων από τη θεωρία ευστάθειας των Δυναμικών Συστημάτων για την επίλυση προβλημάτων από τη θεωρία των Τοπολογικών Ομάδων Μετασχηματισμών, τη Δυναμική Γραμμικών Τελεστών και τη θεωρία Τελεστών. Για περισσότερες λεπτομέρειες παρακαλώ λάβετε υπόψη την Ερευνητική μου Ατζέντα.

- *A.M.S. 2010 Mathematics Subject Classification* όπως αναφέρεται στις υπό ανάλυση δημοσιεύσεις: 20F05, 20G20, 22E10, 22E15, 37B05, 37B99, 37C85, 46L55, 47A16, 47D03, 47L65, 54D45, 54H15, 54H20, 58F25.

## ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

- **Habilitation Thesis,** "Limit sets and asymptotic methods in Operator Theory, Topological Transformation Groups and Dynamical Systems", **Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Bielefeld (2010),** Γερμανία.

- **Διδακτορική Διατριβή:** «Συμβολή στη μελέτη των D-ευσταθών Δράσεων», **Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών (1993)** με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Π. Στράντζαλο.

**1.** "*Linear semigroups with coarsely dense orbits*", **Israel J. Math.**, to appear (από κοινού με τον H. Abels).

**2.** "*A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to Linear Dynamics*", **Journal of Operator Theory 70 (2013)**, 165-174.

**3.** "*Properness, Cauchy-indivisibility and the Weyl completion of a group of isometries*", **Pacific Journal of Mathematics 259 (2012)**, 421–443, (από κοινού με τον Π. Στράντζαλο).

**4.** "*A group of isometries with non-closed orbits* **Topology and its Applications 159 (2012**), 3638-36399, (από κοινού με τον H. Abels).

**5.** "J–class operators and Hypercyclicity", **Journal of Operator Theory 67 (2012)** 101-119, (από κοινού με τον Γ. Κωστάκη).

**6.** "Topological generators of abelian Lie groups and hypercyclic finitely generated abelian semigroups of matrices", **Advances in Mathematics 229 (2012)**, 1862-1872, (από κοινού με τον H. Abels).

7. “Proper actions and proper invariant metrics”, **Journal of the London Mathematical Society (2) 83 (2011)**, 619–636, (από κοινού με τους H. Abels και G. Noskov).

8. “On the action of the group of isometries on a locally compact metric space”, **Münster Journal of Mathematics 3 (2010)**, 209-212.

9. “The group of isometries of a locally compact metric space with one end”, **Topology and its Applications 157 (2010**), 2876-2879.

10. “On the minimal number of matrices which form a locally hypercyclic, non-hypercyclic tuple”, **Journal Mathematical Analysis and Applications 365 (2010)**, 229-237 (από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Δ. Χατζηλουκά).

11. “Dynamics of tuples of matrices”, **Proceedings of the A.M.S. 137 (2009)**, 1025-1034 (από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Δ. Χατζηλουκά).

12. “J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers”, **Integral Equations and Operator Theory 62 (2008)**, 149-158 (από κοινού με τον Γ. Κωστάκη).

13. “On embeddings of proper and equicontinuous actions in zero-dimensional compactifications ”, **Transactions of the A.M.S. 359 (2007)**, 5593-5609 (από κοινού με τον Π. Στράντζαλο).

14. “On the group of isometries on a locally compact metric space”, **Journal of Lie Theory 13 (2003**), 7-12 (από κοινού με τον Π. Στράντζαλο).

15. “The Jacobson radical for analytic crossed products”, **Journal of Functional Analysis 187** (**2001**), 129-145 (από κοινού με τους Α. Κατάβολο και A. P. Donsig).

16. “Minimal flows on multipunctured surfaces of infinite type”, **Bulletin London Mathematical Society 27** (**1995**), 595-598 (από κοινού με τον Κ. Αθανασόπουλο).

## ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΕΣ ΠΡΟΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ

1. *“Coarse topological transitivity on open cones and coarsely J-class and D-class operators”*, arXiv:1306.5331.

2. *“Recurrent linear operators”,* arXiv:1301.1812, (από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Ι. Παρίση).

3. *“Dynamics of perturbations of the identity operator by multiples of the backward shift on* $l^{\infty}(\mathbb{N})$ *”,* arXiv:1302.1736, (από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και A.B. Nasseri).

# *ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΓΑΣΙΩΝ*

**[1] Recurrent linear operators, από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Ι. Παρίση.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία μελετάμε την έννοια της recurrence και μερικές παραλλαγές της για γραμμικούς τελεστές που δρουν επί χώρων Banach. Χαρακτηρίζουμε πλήρως τους recurrent τελεστές για αρκετές κλάσεις όπως weighted shifts, composition τελεστές και multiplication τελεστές επί κλασικών χώρων Banach. Αποδεικνύουμε ότι σε κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert η μελέτη των recurrent τελεστών ανάγεται, σε πολλές περιπτώσεις, στην μελέτη unitary τελεστών. Τέλος, μελετάμε την έννοια της product recurrence και παραθέτουμε μερικά ανοιχτά προβλήματα.

**[2] Dynamics of perturbations of the identity operator by multiples of the backward shift on $l^\infty(\mathbb{N})$, από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και A.B. Nasseri.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Έστω $B, I$ το unweighted backward shift και ο ταυτοτικός τελεστής αντίστοιχα επί του $l^\infty(\mathbb{N})$, το χώρο των φραγμένων μιγαδικών ακολουθιών εφοδιασμένο με τη supremum νόρμα. Στην υπό ανάλυση εργασία αποδεικνύουμε ότι ο τελεστής $I+\lambda B$ είναι τοπικά τοπολογικά μεταβατικός αν και μόνο αν $|\lambda|>2$. Αυτό δείχνει ότι το κλασικό αποτέλεσμα του H.N. Salas ότι κάθε διαταραχή του ταυτοτικού τελεστή από ένα backward shift είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής ή, ισοδύναμα, τοπολογικά μεταβατικός επί του $l^p(\mathbb{N})$, $1\le p<\infty$, δεν ισχύει για την κατηγορία των τοπικά τοπολογικά μεταβατικών τελεστών στον $l^\infty(\mathbb{N})$.

**[3] Linear semigroups with coarsely dense orbits, Israel J. Math., to appear, από κοινού με τον H. Abels.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Έστω $S$ μία πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή υποομάδα αντιστρέψιμων γραμμικών τελεστών επί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης $V$. Αποδεικνύουμε ότι κάθε coarsely dense πυκνή τροχιά της $S$ είναι πυκνή στον $V$. Γενικότερα, αν η τροχιά περιέχει ένα coarsely dense υποσύνολο κάποιου ανοιχτού κώνου $C$ στον $V$ τότε η κλειστότητα της τροχιάς περιέχει την κλειστότητα του $C$. Στην μιγαδική περίπτωση η τροχιά είναι πυκνή στον $V$. Για την πραγματική περίπτωση δίνουμε μία πλήρη περιγραφή όλων των δυνατών περιπτώσεων της θήκης της τροχιάς.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

**Ορισμός** *Ένα υποσύνολο $Y$ ενός μετρικού χώρου $(X,d)$ λέγεται coarsely dense αν υπάρχει μια θετική σταθερά $D$ τέτοια ώστε η ένωση από μπάλες με ακτίνα $D$ και κέντρο τα σημεία του $Y$ είναι μια κάλυψη του $X$.*

Έχοντας υπόψη τον παραπάνω ορισμό, ένα από τα κύρια αποτελέσματα της υπό ανάλυση εργασίας είναι το ακόλουθο.

**Θεώρημα** *Έστω $V$ ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης εφοδιασμένος με μία νόρμα. Έστω $S$ μία υποομάδα της $GL(V)$ που παράγεται από ένα πεπερασμένο πλήθος μεταθετικών στοιχείων. Τότε κάθε coarsely dense τροχιά του είναι πυκνή στον $V$.*

Στην πραγματικότητα αποδεικνύουμε κάτι ακόμα γενικότερο:

**Θεώρημα** *Έστω $V$ ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Έστω $S$ μία υποομάδα της $GL(V)$ που παράγεται από ένα πεπερασμένο πλήθος μεταθετικών στοιχείων. Έστω ότι υπάρχει ένας ανοιχτός κώνος $C$ στον $V$ και μία τροχιά $O = S \cdot u_0$ του τέτοια ώστε το σύνολο $O \cap C$ να είναι coarsely dense στον $C$. Τότε*

(1) *Η κλειστότητα $\overline{S}$ της $S$ είναι μια ανοιχτή υποομάδα της κλειστότητας Zariski της $S$. Ποιό συγκεκριμένα, η $\overline{S}$ έχει πεπερασμένο πλήθος απο συνεκτικές συνιστώσες.*

(2) *Η απεικόνιση $\overline{S} \to V$, $g \mapsto gu_0$, είναι ένας analytic diffeomorphism της $\overline{S}$ επί ενός ανοιχτού κώνου του $V$. Επιπλέον $\dim \overline{S} = \dim_{\mathbb{R}} V$.*

(3) *Η κλειστότητα της τροχιάς $O$ είναι ένας κώνος στον $V$ που περιέχει τον $C$.*

Τέλος, στο επόμενο θεώρημα δίνουμε μία πλήρη περιγραφή όλων των δυνατών περιπτώσεων ανοιχτών τροχιών της $\overline{S}$.

**Θεώρημα** *Έστω $G^*$ μία αβελιανή υποομάδα της $GL(V)$ η οποία έχει μια τροχιά με ένα εσωτερικό σημείο. Έστω $G$ η κλειστότητας Zariski της $G^*$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) *Η ομάδα $G^*$ είναι μια ανοιχτή υποομάδα της $G$ και περιέχει τη συνεκτική συνιστώσα $G^0$ της μονάδας της $G$.*

(2) *Υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος από μεγιστικούς $G^0$-αμετάβλητους υποχώρους του $V$. Αυτοί είναι, επιπλέον, $G$-αμετάβλητοι και έχουν πραγματική συνδιάσταση 1 ή 2. Έστω $H_1, \ldots, H_r$ οι υπόχωροι με συνδιάσταση 1 και $H_{r+1}, \ldots, H_d$ οι υπόχωροι με συνδιάσταση 2. Τότε ισχύει το ακόλουθο*

$$r + 2(d-r) \le \dim_{\mathbb{R}} V .$$

(3) *Έστω* $U$ *το συμπλήρωμα της* $\bigcup_{i=1}^{d} H_i$ *στον* $V$ *και έστω* $u$ *ένα σημείο του* $U$. *Τότε η απεικόνιση* $G \to U$, $g \mapsto gu$, *είναι ένας analytic diffeomorphism.*

(4) *Η ομάδα πηλίκο* $G/G^0$ *είναι ισομορφική με την* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$. *Για ένα σημείο* $u \in U$ *η τροχιά* $G^0u$ *είναι η συνεκτική συνιστώσα του* $u$ *στο* $U$. *Η κλειστότητα της τροχιάς* $G^0u$ *είναι τομή* $r$ *το πλήθος ημιχώρων. Ποιο συγκεκριμένα, για κάθε* $i = 1,\dots,r$ *υπάρχει ακριβώς ένας ημίχωρος* $C_i$ *ορισμένος από τον* $H_i$ *που περιέχει το σημείο* $u$. *Τότε* $\overline{G^0u} = \bigcap_{i=1}^{r} \overline{C_i}$.

(5) *Αν ο* $V$ *έχει την δομή ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου έτσι ώστε κάθε* $h \in G^*$ *είναι μιγαδικός γραμμικός τελεστής, τότε* $r = 0$, *η ομάδα* $G$ *είναι συνεκτική και επομένως* $G^0 = G^* = G$. *Τότε το* $U$ *είναι η μοναδική ανοιχτή* $G^*$*-τροχιά και επομένως είναι πυκνή στον* $V$.

**Βιβλιογραφία**


[1] A. Ayadi and H. Marzougui, *Dynamic of Abelian subgroups of* $GL(n,\mathbb{C})$*: a structure theorem*, Geometria Dedicata **116** (2005), 111-127.

[2] A. Borel and J. Tits, *Homomorphismes ``abstraits" de groupes algébriques simples*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 499-571.

[3] N.S. Feldman, *Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits*, J. Math. Anal. Appl. **346** (2008), 82-98.

[4] C.C. Moore, *Distal affine transformation groups*, Amer. J. Math. 90 (1968), 733-751.


**[4] A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to Linear Dynamics, Journal of Operator Theory 70 (2013, 165-174.**

.


*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία αποδεικνύουμε ένα Birkhoff's transitivity τύπου θεώρημα για μη διαχωρίσιμους πλήρεις μετρικούς χώρους και παραθέτουμε μερικές εφαρμογές για δράσεις φραγμένων γραμμικών τελεστών επί χώρων Fréchet (δηλ. επί πλήρων μετρικοποιήσιμων διανυσματικών χώρων). Ανάμεσα σε αυτές αποδεικνύουμε ότι κάθε θετική δύναμη και κάθε πολλαπλάσιο ενός τοπολογικά μεταβατικού γραμμικού τελεστή με ένα μιγαδικό μέτρου 1 είναι ένας τοπολογικά μεταβατικός γραμμικός τελεστής γενικεύοντας ανάλογα αποτελέσματα της Ansari και των León-Müller για υπερκυκλικού τελεστές.


*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να προμηθεύσουμε ένα «εργαλείο» για τη μελέτη τοπολογικά μεταβατικών γραμμικών τελεστών επί μη διαχωρίσιμων χώρων Fréchet χρησιμοποιώντας τεχνικές από τη θεωρία των υπερκυκλικών τελεστών. Αυτό το «εργαλείο» είναι το επόμενο θεώρημα στο οποίο αποδεικνύουμε ότι κάθε διάνυσμα στον υποκείμενο χώρο $X$ περιέχεται σε «ένα μεγάλο αριθμό» από κλειστούς αμετάβλητους υπερκυκλικούς υποχώρους:

**Θεώρημα** *Έστω $T : X \to X$ ένας τοπολογικά μεταβατικός τελεστής επί ενός χώρου Fréchet $X$ και έστω $y$ ένα διάνυσμα του $X$. Τότε υπάρχει ένα $G_\delta$-πυκνό υποσύνολο $D$ του $X$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in D$ υπάρχει ένας $T$-αμετάβλητος (διαχωρίσιμος) κλειστός υπόχωρος $Y_z$ του $X$ έτσι ώστε $y, z \in Y_z$ και ο περιορισμός $T : Y_z \to Y_z$ να είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής.*

Το προηγούμενο θεώρημα είναι συνέπεια ενός Birkhoff's transitivity τύπου θεώρημα για τοπολογικά μεταβατικούς συνεχείς ενδομορφισμούς επί ενός (όχι κατ' ανάγκη διαχωρίσιμου) πλήρους μετρικού χώρου. Ποιό συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα** *Έστω $T : X \to X$ μία συνεχής απεικόνιση επί ενός πλήρους μετρικού χώρου $X$ χωρίς μεμονωμένα σημεία και έστω $x \in X$. Αν ο $T$ είναι τοπολογικά μεταβατικός τότε υπάρχει $G_\delta$-πυκνό υποσύνολο $D$ του $X$ με τι ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Κάθε σημείο $z \in D$ είναι επανερχόμενο (recurrent).*
(ii) *Το σημείο $x$ ανήκει στη θήκη της τροχιάς καθενός $z \in D$.*

Αυτό το αποτέλεσμα προέρχεται «τοπικοποιώντας» το θεώρημα μεταβατικότητας του Birkhoff (δηλ. ότι κάθε τοπολογικά μεταβατική απεικόνιση επί ενός διαχωρίσιμου πλήρους μετρικού χώρου είναι υπερκυκλική).. Αυτή η τοπική συμπεριφορά ήταν κρυμμένη πίσω από τη χρήση μιας αριθμήσιμης βάσης για τον χώρο.

Οι εφαρμογές που παραθέτουμε υποδηλώνουν την δυνατότητα μελέτης της δυναμικής γραμμικών τελεστών μη διαχωρίσιμων χώρων Fréchet χρησιμοποιώντας ήδη γνωστές τεχνικές και αποτελέσματα από τη θεωρία των υπερκυκλικών τελεστών. Ποιό συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα το οποίο γενικεύει ανάλογα αποτελέσματα της Ansari και των León-Müller για υπερκυκλικού τελεστές.

**Θεώρημα** *Έστω $T : X \to X$ ένας τοπολογικά μεταβατικός τελεστής επί ενός χώρου Fréchet $X$ και έστω $x$ ένα διάνυσμα του $X$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

(i) *Ο τελεστής $T^p : X \to X$ είναι τοπολογικά μεταβατικός για κάθε θετικό ακέραιο $p$ και υπάρχει $G_\delta$-πυκνό υποσύνολο $D$ του $X$ με τι ακόλουθες ιδιότητες:*

(a) *Κάθε σημείο $z \in D$ είναι επανερχόμενο (recurrent).*
(b) *Το σημείο $x$ ανήκει στο οριακό σύνολο $L_{T^p}(z)$ για κάθε θετικό ακέραιο $p$ και κάθε $z \in D$.*

(ii) Έστω $\lambda$ ένας μιγαδικός μέτρου 1, τότε ο τελεστής $\lambda T : X \to X$ είναι τοπολογικά μεταβατικός *και υπάρχει $G_\delta$-πυκνό υποσύνολο $D$ του $X$ με τι ακόλουθες ιδιότητες:*

(a) *Κάθε σημείο $z \in D$ είναι επανερχόμενο (recurrent).*

(b) *Το σημείο* $x$ *ανήκει στο οριακό σύνολο* $L_{\lambda T}(z)$ *για κάθε* $|\lambda|=1$ *και κάθε* $z \in D$.

Τελειώνοντας τις εφαρμογές για γραμμικούς τελεστές δίνουμε ένα χαρακτηρισμό ανάλογο με αυτόν του H. N. Salas στην [14] για backward unilateral weighted shifts επί του $l_2(H)$, όπου $H$ είναι ένας (όχι κατ' ανάγκη διαχωρίσιμος) χώρος Hilbert, σε σχέση με τις ακολουθίες των βαρών τους.

Τέλος, μια άλλη εφαρμογή που παραθέτουμε στην υπό ανάλυση εργασία είναι η ακόλουθη:

**Ορισμός** *Ένας σχεδόν τοπολογικά μεταβατικός ενδομορφισμός ενός χώρου* $X$ *χωρίς μεμονωμένα είναι μια συνεχής απεικόνιση* $T: X \to X$ *με την ιδιότητα για κάθε ζεύγος από μη-κενά ανοικτά σύνολα* $U, V \subset X$ *υπάρχει ένας μη-αρνητικός ακέραιος* $n$ *τέτοιος ώστε* $T^n U \cap V \neq \emptyset$ *ή* $T^n V \cap U \neq \emptyset$, *δηλ. για κάθε ζεύγος* $x, y$ *σημείων του* $X$ *ισχύει* $x \in J(y)$ *ή* $y \in J(x)$.

**Θεώρημα** *Κάθε συνεχής σχεδόν (almost) τοπολογικά μεταβατικός ενδομορφισμός ενός πλήρους μετρικού χώρου χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι τοπολογικά μεταβατικός.*

**Βιβλιογραφία**


[1] S. I. Ansari S, *Hypercyclic and cyclic vectors,* J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383.

[2] J. Banks, *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps,* Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), 505-529.

[3] F. Bayart, K.-G. Grosse Erdmann, V. Nestoridis and C. Papadimitropoulos, *Abstract theory of universal series and applications,* Proc. London Math. Soc. (3) **96** (2008), 417-463.

[4] F. Bayart and É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[5] T. Bermúdez and N. J. Kalton, *The range of operators of von Neumann algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1447-1455.

[6] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, Stability theory of dynamical systems. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 161 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[7] G. D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications,* Acta Math. **43** (1922), 1-119.

[8] G. Costakis and A. Manoussos, *J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers*, Integral Equations Operator Theory **62** (2008), 149-158.

[9] G. Costakis and A. Manoussos, *J-class operators and hypercyclicity*, J. Operator Theory **67** (2012), 101-119.

[10] K.-G. Grosse Erdmann, *Holomorphe Monster und universelle Funktionen,* Mitt. Math. Sem. Giessen (176) (1987).

[11] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris, Linear Chaos, Universitext, Springer, (2011)..

[12] F. León-Saavedra and V. Müller, *Rotations of hypercyclic and supercylcic operators,* Integral Equations Operator Theory **50** (2004), 385-391.
[13] P. Rosenthal and V. G. Troitsky, *Strictly semi-transitive operator algebras,* J. Operator Theory **53** (2005), 315-329.
[14] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts,* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

**[5] Properness, Cauchy-indivisibility and the Weil completion of a group of isometries, Pacific Journal of Mathematics 259 421-443 (2012), από κοινού με τον Π. Στράντζαλο.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Ερευνώντας την επίδραση της τοπικής συμπάγειας και της συνεκτικότητας στη θεωρία των Γνήσιων Δράσεων επί τοπικά συμπαγών και συνεκτικών χώρων, εισάγουμε μια νέα κλάση ισομετρικών δράσεων επί διαχωρίσιμων μετρικών χώρων, τις «Cauchy-indivisible» δράσεις. Αυτή η νέα κλάση συμπίπτει με αυτή των Γνήσιων Δράσεων σε τοπικά συμπαγείς χώρους χωρίς να υποθέσουμε τη συνεκτικότητα του υποκείμενου χώρου και, όπως δείχνουμε με σχετικά παραδείγματα, εν γένη διαφέρουν μεταξύ τους. Προκειμένου να εφοδιάσουμε με μια βασική θεωρία γι' αυτές τις δράσεις, εμβαπτίζουμε μια «Cauchy-indivisible» δράση σε μια Γνήσια δράση μιας ημιομάδας στην πλήρωση του υποκείμενου χώρου. Όπως δείχνουμε, στην περίπτωση που αυτή η ημιομάδα είναι ομάδα, υπάρχει μία αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των «Cauchy-indivisible» δράσεων και των Γνήσιων δράσεων, ενώ, παράλληλα η αρχική ομάδα έχει πλήρωση Weil και αντιστρόφως. Επιπλέον συσχετίσεις σε αυτή την κατεύθυνση εδραιώνουν μια σχέση μεταξύ των «Borel sections» για «Cauchy-indivisible» δράσεις και «fundamental sets» για Γνήσιες δράσεις.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Οι Cauchy-indivisible δράσεις χαρακτηρίζονται από μια ισοτροπική συμπεριφορά σε σχέση με την έννοια της ακολουθίας Cauchy:

**Ορισμός** *Έστω $(G,X)$ μια συνεχής δράση μιας τοπολογικής ομάδας $G$ επί ενός μετρικού χώρου $X$. Η δράση λέγεται Cauchy-indivisible αν ισχύει το ακόλουθο: Για κάθε δίκτυο $\{g_i\}$ στην $G$ τέτοιο ώστε $g_i \to \infty$ και $\{g_i x\}$ είναι ένα Cauchy δίκτυο στον $X$ τότε $\{g_i x\}$ είναι ένα Cauchy δίκτυο για κάθε $x \in X$.*

Όπως δείχνουμε στην υπό ανάλυση εργασία, αυτή η νέα κλάση συμπίπτει με αυτή των Γνήσιων Δράσεων σε τοπικά συμπαγείς χώρους χωρίς να υποθέσουμε τη συνεκτικότητα του υποκείμενου χώρου και, όπως δείχνουμε με σχετικά παραδείγματα, εν γένη διαφέρουν μεταξύ τους.

Έστω $\widehat{X}$ η πλήρωση του μετρικού χώρου $(X,d)$, $Iso(X)$ η ομάδα των ισομετριών του $X$ και έστω $E$ η ημιομάδα Ellis της ανυψωμένης ομάδας $\widehat{Iso(X)}$ στον χώρο των συνεχών απεικονίσεων $C(\widehat{X},\widehat{X})$ του $\widehat{X}$ εφοδιασμένου με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Έστω

$$H = \{h \in C(\widehat{X},\widehat{X}) | \text{υπάρχει ακολουθία } \{g_n\} \subset Iso(X) \text{ με } g_n \to \infty \text{ στην } Iso(X)$$
$$\text{και } \widehat{g_n} \to \text{h στον } C(\widehat{X},\widehat{X})\}$$
$$X_l = \{hx | h \in H, x \in X\} \text{ και}$$
$$X_p = \{hx | h \in H \cap Iso(\widehat{X}), x \in X\}.$$

Τα κύρια αποτελέσματα της υπό ανάλυσης εργασίας είναι τα ακόλουθα.

**Θεώρημα** *Το σύνολο $X \cup X_p$ είναι το μέγιστο υποσύνολο του $X \cup X_l$ που περιέχει τον $X$ έτσι ώστε η απεικόνιση*

$$\omega : E \times (X \cup X_p) \to (X \cup X_p) \times \widehat{X}$$

*με $\omega(f, y) = (y, fy)$, $f \in E$ και $y \in X \cup X_p$ να είναι γνήσια.*

**Πρόταση** *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(1) *Η απεικόνιση*

$$\omega : E \times (X \cup X_l) \to (X \cup X_l) \times \widehat{X}$$

*είναι γνήσια.*

(2) *Η ημιομάδα $E$ είναι μια (κλειστή) υποομάδα της $Iso(\widehat{X})$.*

(3) *Η ομάδα των ισομετριών $Iso(X)$ του $X$ έχει πλήρωση Weil.*

**Πρόταση** *Αν η ημιομάδα $E$ είναι ομάδα τότε η δράση $(E, X \cup X_l)$ έχει μια τομή Borel.*

Τέλος, με το παρακάτω θεώρημα δείχνουμε ότι υπάρχει μια αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των «Borel sections» για «Cauchy-indivisible» δράσεις και «fundamental sets» για Γνήσιες δράσεις:

**Θεώρημα** *Έστω $G$ μια ομάδα που δρα γνήσια επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου $X$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο χώρος των τροχιών $G \backslash X$ είναι παρασυμπαγής. Έστω $S$ μια τομή (section) για τη δράση $(G, X)$, δηλαδή ένα υποσύνολο του $X$ που περιέχει ένα μόνο σημείο από κάθε τροχιά. Τότε*

(1) *Για κάθε ανοιχτή περιοχή $U$ του $S$ μπορούν να κατασκευαστούν ένα κλειστό fundamental set $F_c$ και ένα ανοιχτό fundamental set $F_o$ τέτοια ώστε*

$$F_c \subset F_o \subset U.$$

(2) *Αν, επιπλέον, ο $X$ είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, στην οποία περίπτωση, η δράση $(G, X)$ είναι Cauchy-indivisible, τότε υπάρχει μια τομή Borel $S_B$, η οποία είναι επίσης και fundamental set, τέτοια ώστε*

$$S_B \subset F_c \subset F_o \subset U.$$

**Βιβλιογραφία**


[1] H. Abels, *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 457-473.

[2] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General topology*, Part 1. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General topology*, Part 2. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

[4] E.G. Effros, *Polish transformation groups and classification problems*, General topology and modern analysis (Proc. Conf., Univ. California, Riverside, Calif., 1980), Academic Press, New York-London, 1981.

[5] R. Engelking, *General topology*, Second edition, Sigma Series in Pure Mathematics **6,** Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] G. Hjorth, *An oscillation theorem for groups of isometries*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), 489-521.

[7] R.R. Kallman and R.D. Mauldin, *A cross section theorem and an application to $C^*$-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1978), 57-61.

[8] J.L. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[9] A. Manoussos and P. Strantzalos, *On embeddings of proper and equicontinuous actions in zero-dimensional compactifications*, Transactions of the A.M.S. **359** (2007), 5593-5609.


**[6] A group of isometries with non-closed orbits, Topology and its Applications 159 (2012), 3638-36399, από κοινού με τον H. Abels.**


*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία απαντάμε σε ένα ερώτημα που τέθηκε από τους S. Gao και A. S. Kechris στην [3]. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα με δύο συνεκτικές συνιστώσες, εφοδιασμένη με μία πλήρη μετρική, της οποίας η ομάδα των ισομετριών έχει μια τροχιά που δεν είναι κλειστή.


*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Στην [3, σ. 35] οι S. Gao και A. S. Kechris έθεσαν το ακόλουθο πρόβλημα: Έστω $(X,d)$ ένας τοπικά συμπαγής πλήρης μετρικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος από ψευδο-συνεκτικές ή συνεκτικές συνιστώσες. Είναι αληθές ότι η ομάδα των ισομετριών του $X$ έχει κλειστές τροχιές; (για χάρη οικονομίας χώρου για σχετικούς ορισμούς μπορεί κάποιος να δει την ανάλυση της εργασίας *"On the action of the group of isometries on a locally compact metric space: closed-open partitions and closed orbits"*.) Το ερώτημα αυτό τέθηκε σύμφωνα με το ακόλουθο πλαίσιο: Ας υποθέσουμε ότι μία τοπικά συμπαγής ομάδα με αριθμήσιμη βάση δρα επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου που έχει αριθμήσιμη βάση. Τότε η δράση έχει τοπικά κλειστές τροχιές (δηλαδή τροχιές ανοιχτές στην κλειστότητά τους) αν και μόνο αν υπάρχει μια Borel section (τομή) για τη δράση. Δηλαδή, υπάρχει ένα Borel υποσύνολο του $X$ που περιέχει ένα ακριβώς σημείο από κάθε τροχιά (δες [4] και [2]). Αφού για ισομετρικές δράσεις τοπικά κλειστές τροχιές σημαίνει κλειστές και αντίστροφα το ερώτημα των S. Gao και A. S. Kechris μεταφράζετε στην ερώτηση αν ένας τοπικά συμπαγής πλήρης μετρικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος από ψευδο-συνεκτικές ή συνεκτικές συνιστώσες έχει μια Borel section για την δράση της αντίστοιχης ομάδας των ισομετριών του ή με άλλα λόγια αν η αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας των τροχιών είναι “smooth”.

Στην υπό ανάλυση εργασία δίνουμε αρνητική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα με δύο συνεκτικές συνιστώσες, μια συμπαγής ισομετρική με τον $S^1$ και μια μη συμπαγής, την πραγματική ευθεία με μια τοπικά Ευκλείδεια μετρική. Η πολλαπλότητα μας έχει μία πλήρη μετρική της οποίας η ομάδα των ισομετριών έχει μη-κλειστές πυκνές τροχιές στον $S^1$. Κατά τη διάρκεια της κατασκευής δίνουμε ένα παράδειγμα μιας διδιάστατης πολλαπλότητας με δύο συνεκτικές συνιστώσες, μια συμπαγής και μια μη-συμπαγής της οποίας η ομάδα των ισομετριών $G$ έχει, επίσης, μη-κλειστές πυκνές τροχιές στη συμπαγή συνιστώσα. Η διαφορά με τη μονοδιάστατη περίπτωση είναι ότι η $G$ περιέχει μια υποομάδα με index 2 η οποία είναι ισομορφική με την $\mathbb{R}$.

**Βιβλιογραφία**


[1] D. van Dantzig and B. L. van der Waerden, *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Seminar Hamburg **6** (1928), 367-376.

[2] E. G. Effros, *Transformation groups and C*-algebras*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 38-55.

[3] S. Gao and A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry*, Mem. Amer. Math. Soc. **161** (2003), no. 766.

[4] J. Glimm, *Locally compact transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 124-138.


**[7] J-class operators and hypercyclicity, Journal of Operator Theory 67 (2012), 101-119, από κοινού με τον Γ. Κωστάκη.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία εισάγουμε μια *νέα έννοια* η οποία μπορεί να ιδωθεί ως μια «τοπικοποίηση» της έννοιας της υπερκυκλικότητας (hypercyclicity). Συγκεκριμένα, έστω $T$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που δρα επί ενός χώρου Banach και $x$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $X$ τέτοιο ώστε για κάθε ανοιχτή περιοχή $U \subset X$ του $x$ και για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $V \subset X$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός $n$ τέτοιος ώστε $T^n U \cap V \neq \emptyset$. Σε αυτή την περίπτωση ο $T$ λέγεται $J$-class τελεστής (ή τοπικά τοπολογικά μεταβατικός). Μελετάμε αυτή την νέα κλάση τελεστών και δίνουμε αρκετά παραδείγματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά αποτελέσματα από την θεωρία των υπερκυκλικών (hypercyclic) τελεστών έχουν τα ανάλογα τους στην θεωρία των $J$-class τελεστών. Για παράδειγμα δίνουμε διάφορα αποτελέσματα που σχετίζονται με το θεώρημα των Bourdon-Feldman και επίσης χαρακτηρίζουμε τα *J*-class weighted shifts στους χώρους $l^2(\mathbb{N})$ και $l^2(\mathbb{Z})$ σε σχέση με τις ακολουθίες των βαρών τους. Θα θέλαμε επίσης να επισημάνουμε ότι μη διαχωρίσιμοι χώροι Banach που δεν δέχονται τοπολογικά μεταβατικούς (topologically transitive) τελεστές, όπως για παράδειγμα ο $l^\infty(\mathbb{N})$, δέχονται *J*-class τελεστές.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Έστω $X$ ένας χώρος Banach επί των μιγαδικών (ή πραγματικών) αριθμών και $T$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που δρα επί του $X$. Έστω $x \in X$. Το σύνολο

$$Orb(T,x) := \{T^n x : n = 0,1,2,...\}$$

θα συμβολίζει την *τροχιά* του $x$ ως προς τη δράση του τελεστή $T$. Αν η τροχιά ενός σημείου $x$ είναι πυκνή στον $X$ ο τελεστής $T$ λέγεται *υπερκυκλικός* (hypercyclic) και το διάνυσμα $x$ *υπερκυκλικό*. Αν για κάθε ζεύγος μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων $U,V$ του $X$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε $T^n U \cap V \neq \emptyset$ ο $T$ λέγεται *τοπολογικά μεταβατικός* (topologically transitive) τελεστής. Ας σημειωθεί ότι κάθε υπερκυκλικός τελεστής είναι τοπολογικά μεταβατικός ενώ ισχύει και το αντίστροφο στην περίπτωση που ο $X$ είναι διαχωρίσιμος (separable) χώρος. Ένας τελεστής $T$ λέγεται *supercyclic* αν το σύνολο $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C},\, n = 0,1,2,...\}$ είναι πυκνό στον $X$. Μια καλή πηγή παραδειγμάτων και ιδιοτήτων των υπερκυκλικών και supercyclic τελεστών μπορεί κανείς να βρει στην εργασία [18], καθώς επίσης και στις εργασίες [30], [19], [24], [8], [15], [20] και στο πρόσφατο βιβλίο [2]. Μερικά από τα πιο γνωστά παραδείγματα στο πλαίσιο των χώρων Fréchet (δηλαδή τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων των οποίων η τοπολογία ορίζεται από μια πλήρη μετρική αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις ) είναι τα ακόλουθα.

**Παραδείγματα**

(α) Ο τελεστής μετατόπισης στον χώρο των ακέραιων συναρτήσεων (G. D. Birkhoff (1929)).

Έστω $H(\mathbb{C})$ ο χώρος των ακέραιων συναρτήσεων και έστω $\alpha$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Έστω $T_\alpha : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ο τελεστής μετατόπισης ως προς $\alpha$, όπου

$$T_\alpha(f)(z) := f(z+\alpha), \qquad z \in \mathbb{C},\ f \in H(\mathbb{C}).$$

Τότε ο $T$ είναι υπερκυκλικός.

(β) Ο τελεστής διαφόρισης στον χώρο των ακέραιων συναρτήσεων $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, όπου $D(f) := f'$, $f \in H(\mathbb{C})$ (MacLane (1952)).

(γ) Το backward shift $B : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$ στον $l^p(\mathbb{N})$, $1 < p < +\infty$, όπου

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad \{x_n\} \in l^p(\mathbb{N})$$

*δεν είναι* υπερκυκλικός τελεστής αφού $\left\| B^n \right\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αλλά ο τελεστής $\lambda B$ *είναι* υπερκυκλικός αν $|\lambda| > 1$ (Rolewicz (1969)).

Ας προχωρήσουμε στην παρουσίαση μερικών βασικών εννοιών χρήσιμων για την παρουσίαση των κύριων αποτελεσμάτων της εργασίας. *Τα παρακάτω οριακά σύνολα περιγράφουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών τοπικά γύρω από ένα διάνυσμα* $x \in X$ .

**Ορισμός** *Το σύνολο*

$$J(x) := \{y \in X : \text{υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών } \{k_n\} \text{ και μια ακολουθία } \{x_n\} \text{ τέτοια ώστε } x_n \to x \text{ και } T^{k_n} x_n \to y\}$$

*λέγεται το επεκτεταμένο (extended ή prolongational) οριακό σύνολο του* $x$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν χαρακτηρισμό των οριακών συνόλων χρησιμοποιώντας ανοικτά υποσύνολα του $X$ .

**Πρόταση** *Έστω* $x \in X$ *, τότε*

$$J(x) = \{y \in X : \text{για κάθε ζεύγος περιοχών } U, V \text{ των } x, y \text{ αντίστοιχα, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος } n \text{ έτσι ώστε } T^n U \cap V \neq \varnothing\}.$$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μερικές χρήσιμες ιδιότητες των οριακών συνόλων.

**Πρόταση** *Για κάθε* $x \in X$ *τα σύνολα* $J(x)$ *είναι κλειστά και αμετάβλητα.*

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $T$ είναι τοπολογικά μεταβατικός αν και μόνο αν $J(x) = X$ για κάθε $x \in X$ .

*Ένα από τα κύρια αποτελέσματα μας είναι το επόμενο θεώρημα το οποίο αποτελεί όχι μόνο μια γενίκευση του θεωρήματος* Bourdon-Feldman *αλλά μας το δίνει ως ένα σχεδόν άμεσο πόρισμα.* Συγκεκριμένα

**Θεώρημα** *Έστω* $T : X \to X$ *ένας (φραγμένος) τελεστής που δρα επί ενός (διαχωρίσιμου) χώρου Banach* $X$ *και* $x \in X$ *ένα κυκλικό διάνυσμα για τον* $T$ *. Αν το επεκτεταμένο οριακό* $J(x)$ *έχει μη κενό εσωτερικό τότε* $J(x) = X$ *και ο* $T$ *είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής (χωρίς απαραίτητα το σημείο* $x$ *να έχει πυκνή τροχιά στον* $X$ *).*

Όπου όταν λέμε κυκλικό διάνυσμα εννοούμε

**Ορισμός** *Ένας τελεστής* $T : X \to X$ *λέγεται κυκλικός (cyclic) αν υπάρχει ένα διάνυσμα* $x \in X$ *έτσι ώστε ο υπόχωρος του* $X$ *που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της* *μορφής $P(T)x$, όπου $P(T)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο του $T$, είναι πυκνός στον $X$. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα $x \in X$ λέγεται κυκλικό.*

Ας σημειωθεί ότι η υπόθεση στο παραπάνω θεώρημα ότι το διάνυσμα $x \in X$ είναι κυκλικό δεν μπορεί να παραληφθεί όπως δείχνουμε με ανάλογο παράδειγμα.

**Πόρισμα** (Θεώρημα Bourdon-Feldman [11]) *Έστω $T: X \to X$ ένας φραγμένος τελεστής που δρα επί ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach $X$. Αν $x$ είναι ένα διάνυσμα του $X$ τέτοιο ώστε η κλειστότητα της τροχιάς του $Orb(T,x)$ έχει μη κενό εσωτερικό (: η τροχιά του $x$ είναι somewhere dense) τότε η τροχιά του $x$ είναι πυκνή στον $X$ (και άρα ο $T$ είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής).*

Ας σημειωθεί ότι όπως δείχνουμε με παραδείγματα το παραπάνω θεώρημα αποτελεί πράγματι γενίκευση του θεωρήματος Bourdon-Feldman. Το θεώρημα Bourdon-Feldman είναι αρκετά ισχυρό γιατί μεταξύ άλλων δίνει με τη σειρά του ως άμεσο πόρισμα μια σειρά από σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας των υπερκυκλικών τελεστών. Για παράδειγμα τα ακόλουθα.

**Θεώρημα** (Ansari) *Έστω $T$ ένας υπερκυκλικός τελεστής επί ενός μετρικοποιήσιμου τοπολογικού διανυσματικού χώρου. Τότε ο $T^n$ είναι υπερκυκλικός για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.*

**Θεώρημα** (Κωστάκης-Peris) *Κάθε multi-hypercyclic τελεστής σε ένα χώρο Fréchet $X$ είναι υπερκυκλικός, οπού όταν λέμε multi-hypercyclic εννοούμε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από διανύσματα των οποίων η ένωση των τροχιών είναι πυκνή στον $X$.*

Στην συνέχεια της εργασίας και στο πλαίσιο των παραπάνω αποτελεσμάτων εισάγουμε και μελετάμε μια *νέα κλάση τελεστών* η οποία μπορεί να ιδωθεί ως μια «*τοπικοποίηση*» *της έννοιας της υπερκυκλικότητας*. Συγκεκριμένα

**Ορισμός** *Έστω $X$ ένας χώρος Banach. Ένας τελεστής $T: X \to X$ θα λέγεται J-class τελεστής (ή τοπικά τοπολογικά μεταβατικός) αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in X$ έτσι ώστε $J(x) = X$. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα $x$ λέγεται ένα J-class διάνυσμα του $T$.*

Ας σημειωθεί ότι (όπως συμβαίνει και για την κλάση των υπερκυκλικών τελεστών) μια σειρά κλάσεων τελεστών όπως οι συμπαγείς τελεστές (συμπεριλαμβανομένων και των γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης), οι θετικοί τελεστές και οι hyponormal τελεστές *αποδεικνύουμε* ότι δεν μπορεί να είναι *J*-class τελεστές. Επίσης, δίνουμε παραδείγματα *J*-class τελεστών που δεν είναι υπερκυκλικοί.

Ενδεικτικά, μερικά από τα αποτελέσματα της εργασίας μας σχετικά με την παραπάνω νέα κλάση τελεστών είναι τα ακόλουθα.

**Πρόταση** *Έστω $B: l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})$ στον $l^\infty(\mathbb{N})$ το backward shift. Ο τελεστής $B$ δεν είναι J-class τελεστής. Αν $|\lambda| > 1$ τότε ο τελεστής $\lambda B$ είναι ένας J-class τελεστής και* *τα J-class διανύσματα του $\lambda B$ μαζί με το μηδενικό διάνυσμα αποτελούνται από όλα τα στοιχεία του χώρου $c_0(\mathbb{N}) := \{x = \{x_n\} \in l^\infty(\mathbb{N}) \ : \ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$.*

**Παρατήρηση** Θα θέλαμε επίσης να επισημάνουμε ότι μη διαχωρίσιμοι χώροι Banach που δεν δέχονται τοπολογικά μεταβατικούς (topologically transitive) τελεστές, όπως για παράδειγμα ο $l^\infty(\mathbb{N})$ [3], δέχονται *J*-class τελεστές, όπως δείχνει η προηγούμενη πρόταση.

**Πρόταση** *Έστω ένας τελεστής $T$ που δρα επί ενός χώρου Hilbert $H$. Τότε ο τελεστής $T \oplus T^* : X \oplus X \to X \oplus X$ δεν είναι J-class.*

**Πρόταση** *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής επί ενός χώρου Banach $X$.*

*(i) Για κάθε θετικό ακέραιο $m$ ισχύει ότι $J_T(0) = J_{T^m}(0)$.*

*(ii) Αν $z$ είναι ένα μη μηδενικό περιοδικό σημείο για τον $T$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(1) O $T$ είναι ένας J-class τελεστής.*
*(2) $J(0) = X$.*
*(3) $J(z) = X$.*

*(iii) Αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $z \in X$, ένα διάνυσμα $w \in X$ και μια ακολουθία $\{z_n\} \subset X$ έτσι ώστε $z_n \to z$ και $T^n z_n \to w$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(1) O $T$ είναι ένας J-class τελεστής.*
*(2) $J(0) = X$.*
*(3) $J(z) = X$.*

*Ειδικότερα το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει για τελεστές με μη τετριμμένο πυρήνα ή για τελεστές με ένα τουλάχιστον μη μηδενικό σταθερό σημείο.*

Με την επόμενη πρόταση δίνουμε μια γενική κατασκευή *J*-class τελεστών που δεν είναι υπερκυκλικοί.

**Πρόταση** *Έστω $X$ ένας χώρος Banach και $Y$ ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θεωρούμε ένα τελεστή $S : X \to X$ τέτοιον ώστε $\sigma(S) \subset \{\lambda : |\lambda| > 1\}$. Έστω, επίσης, $T : Y \to Y$ ένας υπερκυκλικός τελεστής. Τότε*

*(i) Ο τελεστής $S \oplus T : X \oplus Y \to X \oplus Y$ είναι J-class αλλά όχι υπερκυκλικός και*

*(ii) το σύνολο των J-διανυσμάτων του τελεστή $S \oplus T$ αποτελούν ένα απειροδιάστατο κλειστό υπόχωρο του $X \oplus Y$ και ειδικότερα*

$$\{x \oplus y : \ x \in X, y \in Y \text{ τέτοια ώστε } J(x \oplus y) = X \oplus Y\} = \{0\} \oplus Y.$$

Στις επόμενες δύο προτάσεις δίνουμε κάποιους χαρακτηρισμούς για τα unilateral και bilateral backward weighted shifts στον $l^2(\mathbb{N})$ σε σχέση με τους υπερκυκλικούς και τους *J*-class τελεστές . Ας σημειωθεί ότι στην κοινή μας εργασία με τίτλο "*J*-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers" [12] δίνουμε ένα *πλήρη χαρακτηρισμό* των *J*-class και $J^{mix}$-class weighted shifts στους χώρους $l^\infty(\mathbb{N})$ και $l^\infty(\mathbb{Z})$ σε σχέση με τις ακολουθίες των βαρών τους. Θυμίζουμε ότι το unilateral backward shift στον $l^2(\mathbb{N})$ με ακολουθία βαρών $\{\alpha_n\}$ είναι ο τελεστής $T: l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ με $T(x_1, x_2, ...) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, ...)$, $\{x_n\} \in l^2(\mathbb{N})$. Ανάλογα ορίζεται και το bilateral backward shift στον $l^2(\mathbb{Z})$ με ακολουθία βαρών $\{\alpha_n\}$.

**Πρόταση** *Έστω $T: l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ ένα unilateral backward shift με ακολουθία θετικών βαρών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και έστω $x$ ένα διάνυσμα του $l^2(\mathbb{N})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Ο $T$ είναι υπερκυκλικός τελεστής.*

*(ii)* $J(x) = l^2(\mathbb{N})$

*(iii)* *Το επεκτεταμένο οριακό σύνολο $J(x)$ έχει μη κενό εσωτερικό.*

**Πρόταση** *Έστω $T: l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ ένα unilateral backward shift με ακολουθία θετικών βαρών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και έστω $x$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $l^2(\mathbb{Z})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Ο $T$ είναι υπερκυκλικός τελεστής.*

*(ii)* $J(x) = l^2(\mathbb{Z})$

*(iii)* *Το επεκτεταμένο οριακό σύνολο $J(x)$ έχει μη κενό εσωτερικό.*

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) F. Bayart and É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

(2) K. –G. Grosse Erdmann and A. P. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Universitext, Springer, 2011.

(2) K. C. Chan and I. Seceleanu, *Orbital limit points and hypercyclicity of operators on analytic functions spaces*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **110**A (2010), 99-109.

(3) I. Seceleanu, Hypercyclic Operators and their Orbital limit points, Ph. D. Thesis, Graduate College of Bowling Green State University, 2010.

(4) M. R. Azimi and V. Müller, *A note on J-sets of linear operators,* RACSAM (to appear).

(5) A. Bahman Nasseri, *On the existence of J-class operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

(6) G. Tian and H. Hou, *Limits of J-class operators*, preprint arXiv:1010.3386.

(7) A. Ayadi and H. Marzougui, *J-class abelian semigroups of matrices on* $C^n$ *and Hypercyclicicty*, prerint arXiv: 1105.1473.

**Βιβλιογραφία**


[1] Ansari S. I., *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383.

[2] Bayart F. and Matheron É., Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[3] Bermúdez T. and Kalton N. J., *The range of operators of von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1447-1455.

[4] Bernal-González L., *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003-1010.

[5] Bès J. P., *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1801-1804.

[6] Bhatia N. P. and Szegö G. P., Stability theory of dynamical systems. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 161 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[7] Bonet J., Frerick L., Peris A. and Wengenroth J., *Transitive and hypercyclic operators on locally convex spaces*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 254-264.

[8] Bonet J., Martínez-Giménez F. and Peris A., *Linear chaos on Frechet spaces*, Dynamical systems and functional equations (Murcia, 2000). Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), 1649-1655.

[9] Bourdon P. S., *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845-847.

[10] Bourdon P. S., *Orbits of hyponormal operators*, Michigan Math. J. **44** (1997), 345-353.

[11] Bourdon P. S. and Feldman N. S., *Somewhere dense orbits are everywhere dense*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 811-819.

[12] Costakis G. and Manoussos A., *J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers*, Integral Equations Operator Theory **62** (2008), 149-158.

[13] Devaney R. L., An introduction to chaotic dynamical systems, Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[14] Feldman N. S., *Perturbations of hypercyclic vectors*, J. Math. Anal. Appl. **273** (2002), 67-74.

[15] Feldman N. S., *(A Survey of) The Dynamics of Cohyponormal Operators*, Contemp. Math. Amer. Math. Soc. **321** (2003), 71-85.

[16] Feldman N. S., *Countably hypercyclic operators*, J. Operator Theory **50** (2003), 107-117.

[17] Grivaux S., *Sums of hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. **202** (2003), 486-503.

[18] Grosse-Erdmann K. -G., *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345-381.

[19] Grosse-Erdmann K. -G., *Recent developments in hypercyclicity*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. (2003), 273-286.

[20] Grosse-Erdmann K. -G., *Dynamics of linear operators*, preprint.

[21] Herrero D., *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[22] Herrero D. A and Kitai C., *On invertible hypercyclic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 873-875.

[23] Kitai C., *Invariant closed sets for linear operators*, Dissertation, University of Toronto (1982).

[24] Montes-Rodríguez A. and Salas H. N., *Supercyclic subspaces*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 721-737.

[25] Montes-Rodríguez A. and Shkarin S. A., *Non-weakly supercyclic operators*, J. Operator Theory **58** (2007), 39-62.

[26] Peris A., *Multihypercyclic operators are hypercyclic*, Math. Z. **236** (2001), 778-786.

[27] Radjavi H. and Rosenthal P., Invariant subspaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 77. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[28] Salas H. N., *A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 765-770.

[29] Salas H. N., *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[30] Shapiro J. H., *Notes on the Dynamics of Linear Operators*, Unpublished Lecture Notes, (available at www.math.msu.edu/~shapiro).


**[8] Topological generators of abelian Lie groups and hypercyclic finitely generated abelian semigroups of matrices, Advances in Mathematics 229 (2012), 1862-1872, από κοινού με τον H. Abels.**


*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία φέρνουμε μαζί διάφορα αποτελέσματα σχετικά με την πυκνότητα υπο-ημιομάδων αβελιανών ομάδων Lie, τον ελάχιστο αριθμό από τοπολογικούς γεννήτορες αβελιανών ομάδων Lie και ένα αποτέλεσμα σχετικά με δράσεις αλγεβρικών ομάδων. Βρίσκουμε έτσι τον ελάχιστο αριθμό από γεννήτορες πεπερασμένως παραγόμενων αβελιανών ομάδων ή ημιομάδων από πίνακες που έχουν μια πυκνή η μια κάπου (somewhere) πυκνή τροχιά υπολογίζοντας τον ελάχιστο αριθμό από γεννήτορες μας πυκνής υπο-ημιομάδας (ή υποομάδας) της συνεκτικής συνιστώσας του ταυτοτικού στοιχείου της κλειστότητας Zariski της.

Στην υπό ανάλυση εργασία υπολογίζουμε τον ελάχιστο αριθμό από γεννήτορες μιας πεπερασμένως παραγόμενης αβελιανής ομάδας ή ημιομάδας πραγματικών ή μιγαδικών πινάκων που έχει μία πυκνή η μια κάπου (somewhere) πυκνή τροχιά για διάφορες κλάσεις πινάκων όπως διαγώνιους, τριγωνοποιήσιμους μη διαγώνιους και τριγωνοποιήσιμους μη διαγώνιους πίνακες Toeplitz. Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι γι' αυτό τον ελάχιστο αριθμό δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ πυκνής ή κάπου πυκνής τροχιάς ή μεταξύ ημιομάδων και ομάδων. Αυτό προκύπτει από το επόμενο θεώρημα το οποίο είναι και το βασικό αποτέλεσμα της υπό ανάλυση εργασίας.

Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί των πραγματικών αριθμών και έστω $S$ μια υποομάδα της $GL(V)$.

**Θεώρημα** *Έστω $S$ μια πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή υποομάδα της $GL(V)$ και έστω $x \in V$ ένα διάνυσμα με μία κάπου πυκνή τροχιά. Έστω $G$ η κλειστότητα Zariski τής $S$ και έστω $G^0$ η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας της $G$ ως προς την Ευκλείδεια τοπολογία. Τότε η τροχιά $G(x)$ του $x$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $V$, η φυσική απεικόνιση $G \to G(x)$, $g \mapsto gx$, είναι ένας diffeomorphism και η κλειστότητα της $S$ είναι μια υποομάδα της $G$ και περιέχει την $G^0$.*

Το παραπάνω θεώρημα προκύπτει από τα επόμενα αποτελέσματα της υπό ανάλυση εργασίας, μερικά εκ των οποίων παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον από μόνα τους.

**Θεώρημα** *Έστω $G$ μια αβελιανή ομάδα Lie της οποίας η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας $G^0$ είναι πεπερασμένου δείκτη (finite index). Έστω $S$ μια πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή υποομάδα της $G$ που είναι κάπου πυκνή στην $G$, δηλαδή η κλειστότητα της $S$ στην $G$ περιέχει ένα μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο της $G$. Τότε η κλειστότητα της $S$ στην $G$ είναι μια υποομάδα της $G$ και περιέχει την $G^0$.*

Έστω $G$ μία τοπολογική ομάδα και έστω $d_{gr}G$ και $d_mG$ οι ελάχιστοι αριθμοί από στοιχεία ενός υποσυνόλου $A$ της $G$, έτσι ώστε η παραγόμενη ομάδα, αντίστοιχα υποομάδα, από το $A$ να είναι πυκνή στην $G$. Αν η $G$ είναι μια συνεκτική αβελιανή ομάδα Lie τότε περιέχει μία μεγιστική συμπαγή υποομάδα $T$ η οποία είναι torus, δηλαδή μια συμπαγής συνεκτική αβελιανή ομάδα Lie. Έστω $d$ η διάσταση του χώρου-πηλίκο $G/T$. Τότε ισχύει το ακόλουθο

**Θεώρημα** $d_{gr}G = d_mG = d + 1$ *εκτός αν η $G$ είναι τετριμμένη.*

Έστω $V$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης $n$ και έστω $S$ μια υπο(ημι)ομάδα της $GL(V)$. Έστω $G$ η κλειστότητα *Zariski* τής $S$, η οποία είναι μια κλειστή αβελιανή υποομάδα της $GL(V)$ με πεπερασμένο πλήθος από συνεκτικές συνιστώσες και έστω $T$ μία μεγιστική συμπαγή συνεκτική υποομάδα της. Τότε

**Θεώρημα** *Αν η $S$ έχει μια κάπου πυκνή τροχιά τότε έχει minimum $n+1-\dim T$ από γεννήτορες.*

Στη συνέχεια της υπό ανάλυση εργασίας δίνουμε μια περιγραφή αυτών των τροχιών κάτι που κάνουμε διεξοδικότερα στην [1].

**Βιβλιογραφία**


[1] H. Abels and A. Manoussos, *Linear semigroups with coarsely dense orbits*, preprint, arXiv:1008.2221.

[2] H. Abels and E.B. Vinberg, *Generating semisimple groups by tori*, J. Algebra **328** (2011), 114-121.

[3] A. Ayadi, *Hypercyclic abelian semigroup of matrices on* $\mathbb{C}^n$ *and* $\mathbb{R}^n$ *and* $k$*-transitivity (* $k \geq 2$ *)*, Applied General Topology, to appear.

[4] A. Ayadi and H. Marzougui, *Dynamic of Abelian subgroups of* $GL(n,\mathbb{C})$*: a structure theorem*, Geometria Dedicata **116** (2005), 111-127.

[5] A. Ayadi and H. Marzougui, Dense orbits for abelian subgroups of $GL(n,\mathbb{C})$, Foliations 2005: World Scientific, Hackensack, NJ (2006), 47-69.

[6] F. Bayart and É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[7] A. Borel and J. Tits, *Homomorphismes ``abstraits" de groupes algébriques simples*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 499-571.

[8] G. Costakis, D. Hadjiloucas and A. Manoussos, *Dynamics of tuples of matrices*, Proc.Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1025-1034.

[9] G. Costakis, D. Hadjiloucas and A. Manoussos, *On the minimal number of matrices which form a locally hypercyclic, non-hypercyclic tuple*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 229-237.

[10] G. Costakis and I. Parissis, *Dynamics of tuples of matrices in Jordan normal form*, preprint arXiv:1003.5321.

[11] N.S. Feldman, *Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits*, J. Math. Anal. Appl. **346** (2008), 82-98.

[12] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris, *Linear Chaos*, Universitext, Springer, 2011

[13] M. Javaheri, *Semigroups of matrices with dense orbits*, preprint arXiv:0905.1311.

[14] L. Kerchy, *Cyclic properties and stability of commuting power bounded operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 299-312.

[15] S. Shkarin, *Hypercyclic tuples of operators on* $\mathbb{C}^n$ *and* $\mathbb{R}^n$, preprint arXiv:1008.3483.

**[9] Proper actions and proper invariant metrics, Journal of the London Mathematical Society (2) 83 (2011), 619–636, από κοινού με τους H. Abels και G. Noskov.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία δείχνουμε ότι αν μια (τοπικά συμπαγής) ομάδα $G$ δρα γνησίως επί ενός τοπικά συμπαγή σ-συμπαγή χώρου $X$ τότε υπάρχει μια οικογένεια από $G$-αμετάβλητες γνήσιες συνεχείς ψευδομετρικές που παίρνουν πεπερασμένες τιμές και επάγουν την τοπολογία του $X$. Αν, επιπλέον, ο $X$ είναι μετρικοποιήσιμος τότε η ομάδα $G$ δρα γνησίως στον $X$ αν και μόνο αν υπάρχει μια $G$-αμετάβλητη γνήσια μετρική που επάγει την τοπολογία του $X$.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Στην εργασία αυτή θεμελιώνουμε μια ισχυρή διασύνδεση μεταξύ των γνησίων δράσεων και των ομάδων ισομετριών. Σ' αυτή την κατεύθυνση υπάρχει ένα παλαιό αποτέλεσμα των van Dantzig και van der Waerden [5] στα 1928 που λέει ότι η ομάδα των ισομετριών $I(X,d)$ ενός τοπικά συμπαγούς και συνεκτικού μετρικού χώρου $(X,d)$ είναι τοπικά συμπαγής και δρα γνησίως επί του $X$. Θυμίζουμε ότι

**Ορισμός** *Έστω $(G,X)$ μια συνεχής δράση μιας τοπολογικής ομάδας επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου. Η δράση λέγεται γνήσια (proper) αν η απεικόνιση $G\times X\to X\times X$ με $(g,x)\mapsto(x,gx)$ είναι γνήσια, δηλαδή, αν είναι κλειστή απεικόνιση και η αντίστροφη εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου είναι ένα συμπαγές σύνολο,ή ισοδύναμα, αν τα σύνολα*

$$J(x)=\{y\in X \mid \text{υπάρχουν δίκτυα } x_i\to x \text{ στον } X \text{ και } g_i\to\infty \text{ στην } G \text{ ώστε } g_ix_i\to y\}$$

*είναι κενά για κάθε $x\in X$, όπου $g_i\to\infty$ εδώ σημαίνει ότι το δίκτυο δεν έχει σημεία συσσώρευσης στην $G$.*

**Παρατήρηση** Σε περίπτωση που η (τοπολογική) ομάδα $G$ είναι τοπικά συμπαγής, μια συνεχής δράση $(G,X)$ είναι γνήσια αν και μόνο αν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχουν περιοχές τους $U_x,U_y$, αντίστοιχα, τέτοιες, ώστε το σύνολο $\{g\in G \mid (gU_x)\cap U_y\neq\varnothing\}$ να έχει συμπαγή θήκη στη $G$.

Σε περίπτωση που ο $(X,d)$ πάψει να είναι συνεκτικός τότε η ομάδα των ισομετριών του $I(X,d)$ είναι κάποιες φορές τοπικά συμπαγής αλλά δεν δρα κατ' ανάγκη γνησίως επί του $X$ (πρβλ. [13]). Ως αναφορά την γνησιότητα της δράσης οι Gao και Kechris [6], απέδειξαν ότι αν ο $(X,d)$ είναι ένας γνήσιος μετρικός χώρος τότε η ομάδα των ισομετριών του $I(X,d)$ είναι τοπικά συμπαγής και δρα γνησίως επί του $X$. Θυμίζουμε ότι

**Ορισμός** *Ένας (ψεύδο-) μετρικός χώρος ονομάζεται γνήσιος (ή Heine-Borel) αν κάθε μπάλα με πεπερασμένη ακτίνα έχει συμπαγή κλειστή θήκη στον $X$.*

Σ' αυτήν την εργασία αποδεικνύουμε το ακόλουθο αντίστροφο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα** *Έστω $G$ μία (τοπικά συμπαγής) ομάδα πού δρα γνησίως επί ενός μετρικοποιήσιμου τοπικά συμπαγή σ-συμπαγή τοπολογικού χώρου $X$. Τότε υπάρχει μια $G$-αμετάβλητη μετρική που επάγει την τοπολογία του $X$.*

Θυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος καλείτε *σ-συμπαγής* αν μπορεί να γραφεί σαν αριθμήσιμη ένωση από συμπαγή σύνολα.

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα κατά πόσο μπορούμε να το γενικεύσουμε στην μη μετρικοποιήσιμη περίπτωση. Σ' αυτή την κατεύθυνση απαντάμε *πλήρως* με το ακόλουθο θεώρημα το οποίο είναι και το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας μας.

**Θεώρημα** *Έστω $G$ μία (τοπικά συμπαγής) ομάδα πού δρα γνησίως επί ενός τοπικά συμπαγούς σ-συμπαγούς τοπολογικού χώρου Hausdorff $X$. Τότε υπάρχει μια οικογένεια από $G$-αμετάβλητες γνήσιες συνεχείς ψευδομετρικές που παίρνουν πεπερασμένες τιμές και επάγουν την τοπολογία του $X$.*

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως αντίστροφο του επόμενου θεωρήματος.

**Θεώρημα** *Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $\Im$ μια οικογένεια από γνήσιες συνεχείς ψευδομετρικές επί του $X$ που παίρνουν πεπερασμένες τιμές και επάγουν την τοπολογία του $X$. Έστω $G$ η ομάδα όλων των «ένα προς ένα» και «επί» απεικονίσεων $f: X \to X$ τέτοιων ώστε $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $d \in \Im$. Τότε η ομάδα $G$ εφοδιασμένη με την συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία είναι τοπικά συμπαγής και δρα γνησίως επί του $X$.*

**Σημείωση** Η μεγάλη σε έκταση απόδειξη του κυρίου αποτελέσματος της υπό ανάλυση εργασίας γίνεται σε διάφορα βήματα. Πιο συγκεκριμένα.

(1) Πρώτα κατασκευάζουμε μια οικογένεια $\Im$ από ψευδομετρικές επί του $X$ με τιμές στο $[0,1]$ που επάγουν την τοπολογία του $X$.

(2) Στη συνέχεια δείχνουμε πως να κάνουμε τα στοιχεία της $\Im$ $G$-αμετάβλητα.

(3) Έπειτα κάνουμε κάθε στοιχείο της $\Im$ τροχιωδώς γνήσιο (orbitwise proper), δηλαδή αν $d \in \Im$ τότε η εικόνα $\pi(B_d(x,r))$ έχει συμπαγή θήκη για κάθε $x \in X$ και $0 < r < +\infty$, όπου $\pi : X \to G \setminus X$ είναι η φυσική απεικόνιση στον χώρο των τροχιών $G \setminus X$ και $B_d(x,r) := \{ y \in X : d(x,y) < r \}$.

(4) Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το βασικό εργαλείο αυτής της εργασίας που είναι η κατασκευή με measuring sticks. Πιο συγκεκριμένα ας φανταστούμε ότι έχουμε μια οικογένεια από measuring sticks από δοθείσες αποστάσεις «γειτονικών» σημείων. Τότε ορίζουμε μια ψευδομετρική επί του $X$ παίρνοντας ως $d(x, y)$, $x, y \in X$ το infimum από όλες τις μετρήσεις από ακολουθίες σημείων $x = x_0, ..., x_n = y$ τέτοιων ώστε η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων δίνεται από κάποια measuring sticks. Όπως προκύπτει, αν επιλέξουμε «κατάλληλα» measuring sticks που προκύπτουν από την ύπαρξη ενός ανοιχτού «θεμελιώδους συνόλου» (fundamental set) της δράσης (πρβλ. [12]) τότε παίρνουμε μια γνήσια ψευδομετρική. *Το μειονέκτημα είναι ότι αυτή η ψευδομετρική δεν παίρνει απαραίτητα πεπερασμένες τιμές.*

(5) Τότε χρησιμοποιούμε την «κατασκευή γεφυρών». Πιο συγκεκριμένα ας φανταστούμε τα ζευγάρια των σημείων για τα οποία ισχύει $d(x, y) < +\infty$ ότι βρίσκονται πάνω στο ίδιο «νησί». Αυτό που αποκαλούμε «νησί» είναι μια κλάση ισοδυναμίας που προκύπτει από την σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $d(x, y) < +\infty$. Στη συνέχεια συνδέουμε κάποια από αυτά τα «νησιά» με γέφυρες (δηλαδή κάποια καινούρια measuring sticks) τοποθετώντας κάποια κατάλληλα (μεγάλα) βάρη σε αυτές και κατασκευάζουμε μια καινούρια ψευδομετρική κατά τον τρόπο που περιγράψαμε στο προηγούμενο βήμα της απόδειξης χρησιμοποιώντας την ίδια την ψευδομετρική από το τέταρτο βήμα και τα βάρη από τις «γέφυρες». Ως αποτέλεσμα είναι ότι παίρνουμε μια νέα γνήσια ψευδομετρική (για την ακρίβεια μια οικογένεια ψευδομετρικών) που παίρνουν πεπερασμένες τιμές και επάγουν την τοπολογία του $X$. Ας σημειωθεί ότι όλες οι κατασκευές γίνονται με τέτοιο τρόπο ώστε η νέα οικογένεια ψευδομετρικών να είναι $G$-αμετάβλητη.

Ως συνέπεια του κυρίου αποτελέσματός μας παίρνουμε ως πορίσματα τα παρακάτω.

**Πόρισμα** ([14] και επαναποδείχτηκε στην [7]) *Κάθε δεύτερη αριθμήσιμη τοπικά συμπαγής ομάδα έχει μια αριστερά αμετάβλητη γνήσια μετρική που επάγει την τοπολογία της.*

**Πόρισμα** ([4]) *Η ομάδα των ισομετριών ενός γνήσιου μετρικού χώρου έχει μια αριστερά αμετάβλητη γνήσια μετρική που επάγει την τοπολογία της.*

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**


(1) N. Antonyan, S.A. Antonyan and L. Rodríguez-Medina, *Linearization of proper actions of locally compact groups on Tychonoff spaces*, Topology Appl. **159** (2012), 1695-1701.

(2) P. Müller and C. Richard, *Ergodic properties of randomly coloured point sets*, preprint.

(2) P. Niemiec, *Isometry groups of proper metric spaces*, preprint arXiv: 1201.5675.

(3) P. Niemiec, *Polish groups as isometry groups*, preprint arXiv: 1202.3368.

**Βιβλιογραφία**


[1] Abels H. and Strantzalos P., *Proper transformation groups*, Μονογραφία σε προετοιμασία.

[2] Antonyan S. and Neymet S., *Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces*, Acta Math. Hungar. **98** (2003), 59-69.

[3] Bourbaki N., Elements of Mathematics. General Topology, Parts I and II, Hermann, Paris, 1966.

[4] Busemann H., Geometry of Geodesics, Academic Press, New York, 1955.

[5] van Dantzig D. and Waerden B. L. van der, *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), 367-376.

[6] Gao S. and Kechris A.S., *On the classification of Polish metric spaces up to isometry,* Mem. Amer. Math. Soc. **161** (2003), no. 766.

[7] Haagerup U. and Przybyszewska A., *Proper metrics on locally compact groups, and proper affine isometric actions on Banach spaces,* arXiv:math.OA/0606794v1 (2006).

[8] Janos L., *A group theoretic property of Heine-Borel metrics,* Geometry and Topology, 215-218, World Sci. Publishing, Singapore, 1989.

[9] Kankaanrinta M., *Proper smooth G-manifolds have complete G-invariant Riemannian metrics,* Topology Appl. **153** (2005), 610-619.

[10] Kasparov G. and Yu G., *The coarse geometric Novikov conjecture and the uniform convexity,* Adv. Math. **206** (2006), 1-56.

[11] Kasparov G. and Skandalis G., *Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), 165-206.

[12] Koszul J.L., Lectures on groups of transformations, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[13] Manoussos A. and Strantzalos P., *On the group of isometries on a locally compact metric space*, J. Lie Theory **13** (2003), 7-12.

[14] Struble R.A., *Metrics in locally compact groups,* Compositio Math. **28** (1974), 217-222.

[15] Williamson R. and Janos L., *Constructing metrics with the Heine-Borel property,* Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 567-573.


**[10] On the action of the group of isometries on a locally compact metric space, Münster Journal of Mathematics 3 (2010), 209-212.**


*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία απαντάμε στο επόμενο ερώτημα: Έστω $X$ ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $G$ η ομάδα των ισομετριών του. Έστω $\{g_i\}$ ένα δίκτυο στην $G$ για το οποίο υπάρχουν σημεία $x, y \in X$ έτσι ώστε $g_i x \to y$. Τι μπορούμε να συνάγουμε για την σύγκλιση του $\{g_i\}$; Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα υποδίκτυο $\{g_j\}$ του $\{g_i\}$ και μια ισομετρία $f: C_x \to X$ έτσι ώστε $g_j \to f$ κατά σημείο στην $C_x$ και $f(C_x) = C_y$, όπου $C_x$ και $C_y$ συμβολίζουν τις ψευδο-συνιστώσες (pseudo-components) των $x$ και $y$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας αυτό δίνουμε πολύ σύ-

ντομες αποδείξεις του θεωρήματος των van Dantzig – van der Waerden (1928) και του θεωρήματος των Gao – Kechris (2003).

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Μερικά λόγια για το συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε. Σε ότι ακολουθεί με $X$ θα συμβολίζουμε ένα τοπικά συμπαγή μετρικό χώρο και με $G$ την αντίστοιχη ομάδα των ισομετριών του. Αν εφοδιάσουμε την $G$ με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης τότε η $G$ είναι μια τοπολογική ομάδα [2, Ch. X, §3.5 Corollary]. Στην ομάδα $G$ υπάρχει επίσης και η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του $X$ η οποία είναι ίδια με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία. Στην περίπτωση των ομάδων ισομετριών οι τοπολογίες αυτές συμπίπτουν με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και η φυσική δράση της $G$ επί του $X$ με $(g,x)\mapsto g(x)$, $g\in G$, $x\in X$, είναι συνεχής απεικόνιση [2, Ch. X, §2.4 Theorem και §3.4 Corollary 1].

Στην [4] οι S. Gao και A. S. Kechris εισήγαγαν την έννοια των ψευδο-συνιστωσών (pseudo-components). Αυτές είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας $C_x$ της ακόλουθης σχέσης ισοδυναμίας: $x\sim y$ αν και μόνο αν τα ζεύγη $(x,y)$ και $(y,x)$ μπορούν να συνδεθούν με μία πεπερασμένη ακολουθία από σφαίρες που τέμνονται ανά δύο και έχουν συμπαγείς θήκες. Οι ψευδο-συνιστώσες είναι ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του $X$ [4, Proposition 5.3]. Ο $X$ καλείται ψευδο-συνεκτικός (pseudo-connected) αν έχει μόνο μία ψευδο-συνιστώσα.

Τα κύριο αποτελέσματα της υπό ανάλυση εργασίας είναι το ακόλουθο.

**Θεώρημα** *Έστω $X$ ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και $G$ η ομάδα των ισομετριών του. Έστω $\{g_i\}$ ένα δίκτυο στην $G$ για το οποίο υπάρχουν σημεία $x,y\in X$ έτσι ώστε $g_i x\to y$. Τότε υπάρχει ένα υποδίκτυο $\{g_j\}$ του $\{g_i\}$ και μια ισομετρία $f:C_x\to X$ έτσι ώστε $g_j\to f$ κατά σημείο στην $C_x$ και $f(C_x)=C_y$.*

Λίγα λόγια περί της γνησιότητας των δράσεων. Μια συνεχής δράση μιας τοπολογικής ομάδας $H$ επί ενός τοπολογικού χώρου $Y$ λέγεται γνήσια (proper) (ή Bourbaki γνήσια) αν η απεικόνιση $H\times Y\to Y\times Y$ με $(g,x)\mapsto(x,gx)$, $g\in H$, $x\in Y$ είναι γνήσια, δηλαδή είναι συνεχής, κλειστή και η αντίστροφη εικόνα κάθε μονοσυνόλου είναι συμπαγής. Με όρους δικτύων μια δράση είναι γνήσια αν οποτεδήποτε έχουμε δύο δίκτυα $\{g_i\}$ στην $H$ και $\{x_i\}$ στον $Y$ για τα οποία τα δίκτυα $\{x_i\}$ και $\{g_i x_i\}$ συγκλίνουν και τα δύο, τότε το δίκτυο $\{g_i\}$ έχει συγκλίνων υποδίκτυο. Για δράσεις ισομετριών είναι εύκολο κανείς να δείξει ότι μια δράση είναι γνήσια αν οποτεδήποτε έχουμε ένα δίκτυο $\{g_i\}$ στην $H$ για το οποίο το δίκτυο $\{g_i x\}$ συγκλίνει για κάποιο $x\in Y$, τότε το δίκτυο $\{g_i\}$ έχει συγκλίνων υποδίκτυο. Άν η $H$ είναι τοπικά συμπαγής και ο $Y$ είναι Hausdorff, τότε η $H$ δρα γνησίως επί του $Y$ αν και μόνο αν για κάθε $x,y\in Y$ υπάρχουν περιοχές τους $U_x, U_y$, αντίστοιχα, τέτοιες, ώστε το σύνολο $\{g\in G \mid (gU_x)\cap U_y\neq\varnothing\}$ να έχει συμπαγή θήκη στη $H$ [1, Ch. III, §4.4 Proposition 7]. Παρατηρούμε ότι αν η $H$ δρα γνησίως επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου $Y$ τότε είναι τοπικά συμπαγής.

Μια άμεση συνέπεια του κυρίου αποτελέσματος της υπό ανάλυση εργασίας είναι το θεώρημα van Dantzig – van der Waerden [3]. Το πλεονέκτημα της απόδειξης μας είναι ότι είναι αξιοσημείωτα μικρή σε σχέση με την απόδειξη των van Dantzig – van der Waerden η με την απόδειξη στην [5, Theorem 4.7, pp. 46-49]

**Πόρισμα (Θεώρημα van Dantzig – van der Waerden, 1928)** *Έστω $X$ ένας συνεκτικός τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος με ομάδα ισομετριών $G$. Τότε η $G$ δρα γνησίως επί του $X$ και είναι τοπικά συμπαγής.*

Μια άλλη εφαρμογή του κυρίου αποτελέσματος της υπό ανάλυση εργασίας είναι ότι ξαναπαίρνουμε τα αποτελέσματα των Gao και Kechris [4, Theorem 5.4 και Corollary 6.2].

**Πόρισμα (Θεώρημα Gao – Kechris, 2003)** *Έστω $X$ ένας τοπικά συμπαγής μετρικός με πεπερασμένο πλήθος από ψευδο-συνεκτικές συνιστώσες. Τότε η ομάδα των ισομετριών του $G$ είναι τοπικά συμπαγής. Αν ο $X$ είναι ψευδο-συνεκτικός, τότε η $G$ δρα γνησίως επί του $X$.*

**Βιβλιογραφία**


[1] N. Bourbaki, Elements of Mathematics. General topology, Part 1. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

[2] N. Bourbaki, Elements of Mathematics. General topology, Part 2. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

[3] D. van Dantzig and B. L. van der Waerden, *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Seminar Hamburg **6** (1928), 367-376.

[4] S. Gao and A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry*, Mem. Amer. Math. Soc. **161** (2003), no. 766.

[5] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol I, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963.

[6] A. Manoussos and P. Strantzalos, *On the group of isometries on a locally compact metric space*, J. Lie Theory **13** (2003), 7-12.


**[11] The group of isometries of a locally compact metric space with one end, Topology and its Applications 157 (2010), 2876-2879.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία μελετάμε τη δυναμική της "φυσικής" δράσης της ομάδας των ισομετριών $G$ ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου $(X,d)$ με ένα πέρας (end). Χρησιμοποιώντας την έννοια των ψευδο-συνιστωσών, που εισήχθη από τους S. Gao και A. S. Kechris, δείχνουμε ότι ο $X$ έχει πεπερασμένο πλήθος από ψευδο-συνιστώσες εκ των οποίων μόνο μία είναι μη συμπαγής και η $G$ δρα γνησίως επί αυτής. Το συμπλήρωμα της μη συμπαγούς συνιστώσας είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$ και η $G$ ενδεχομένως να μη δρα γνησίως (properly) σε αυτό.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Για οικονομία χώρου, για τους σχετικούς ορισμούς παραπέμπουμε στην ανάλυση των εργασιών *"On the action of the group of isometries on a locally compact metric space: closed-open partitions and closed orbits" και "On embeddings of proper and equicontinuous actions in zero-dimensional compactifications".*

Η ιδέα της μελέτης της δυναμικής της "φυσικής" δράσης της ομάδας των ισομετριών $G$ ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου $(X,d)$ με ένα πέρας (end), χρησιμοποιώντας την έννοια των ψευδο-συνιστωσών, που εισήχθη από τους S. Gao και A. S. Kechris, προήλθε από μία εργασία του E. Michael [8]. Σ' αυτή την εργασία εισήγαγε την έννοια του J-χώρου (*προσοχή*! οι J-χώροι δεν έχουν καμία σχέση με τους J-class τελεστές!! Το γράμμα J προέρχεται από τις καμπύλες Jordan και όχι από τα J-οριακά σύνολα). Ένας J-χώρος είναι ένας τοπολογικός χώρος $X$ με την ιδιότητα οποτεδήποτε το $\{A,B\}$ είναι ένα κάλυμμα του $X$ από κλειστά σύνολα έτσι ώστε η τομή $A\cap B$ να είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$ τότε το $A$ ή το $B$ είναι συμπαγές. Με όρους συμπαγοποιήσεων, ένας τοπικά συμπαγής μη συμπαγής χώρος είναι ένας J-χώρος αν και μόνο αν η end-point (Freudenthal) συμπαγοποίηση του $X$ συμπίπτει με την one-point συμπαγοποίησή του ([8], [9]). Από τοπολογικής άποψης οι τοπικά συμπαγείς χώροι με ένα πέρας αποτελούν την «γενική περίπτωση», υπό την έννοια ότι το Καρτεσιανό γινόμενο δύο μη συμπαγών, τοπικά συμπαγών και συνεκτικών χώρων είναι ένας τοπολογικός χώρος με ένα πέρας ([8], [9]), οπότε αποτελεί μάλλον έκπληξη ότι η δυναμική της ομάδας $G$ ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου $(X,d)$ με ένα πέρας είναι σχετικά απλή όπως δείχνει το κύριο αποτέλεσμα της υπό ανάλυση εργασίας:

**Θεώρημα** Έστω $(X,d)$ ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος με ένα πέρας και έστω $G$ η ομάδα των ισομετριών του. Τότε

(i) ο $X$ έχει πεπερασμένο πλήθος από ψευδο-συνιστώσες εκ των οποίων μόνο μία είναι μη συμπαγής και η $G$ είναι τοπικά συμπαγής.

(ii) Έστω $P$ η μη συμπαγής ψευδο-συνιστώσα. Τότε η $G$ δρα γνησίως (properly) επί της $P$, το $X \setminus P$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$ και η $G$ ενδεχομένως να μη δρα γνησίως σε αυτό.

**Βιβλιογραφία**

[1] H. Abels and A. Manoussos, *A group of isometries with non-closed orbits*, preprint arXiv:0910.4717.

[2] N. Bourbaki, Elements of Mathematics. General topology, Part 2. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[4] S. Gao and A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to*

*isometry*, Mem. Amer. Math. Soc. **161** (2003), no. 766.

[5] A. Manoussos, *On the action of the group of isometries on a locally compact metric space*, Münster J. Math. (to appear).

[6] A. Manoussos and P. Strantzalos, *On the group of isometries on a locally compact metric space*, J. Lie Theory **13** (2003), 7-12.

[7] J. R. McCartney, *Maximum zero-dimensional compactifications*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **68** (1970), 653-661.

[8] E. Michael, *J-spaces*, Topology Appl. **102** (2000), 315-339.

[9] K. Nowiński, *Closed mappings and the Freudenthal compactification*, Fund. Math. **76** (1972), 71-83.

[10] W. Sierpinski, *Sur les espaces métriques localement séparables*, Fund. Math. **21** (1933), 107-113.

[11] P. Strantzalos, *Actions by isometries*, Transformation groups (Osaka, 1987), 319-325, Lecture Notes in Math., **1375**, Springer, Berlin, 1989.

**[12] On the minimal number of matrices which form a locally hypercyclic, non-hypercyclic tuple, Journal of Mathematical Analysis and Applications 365 (2010), 229-237, από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Δ. Χατζηλουκά.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία επεκτείνουμε την έννοια των τοπικά υπερκυκλικών τελεστών για n-άδες γραμμικών τελεστών. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι υπερκυκλικές n-άδες τελεστών αποτελούν γνήσια υποκλάση αυτής των τοπικά υπερκυκλικών n-άδων γραμμικών τελεστών. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι σε κάθε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, υπάρχουν *ζευγάρια* από πίνακες που μετατίθενται τα οποία είναι τοπικά υπερκυκλικά αλλά όχι υπερκυκλικά. Αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την περίπτωση των υπερκυκλικών n-άδων από πίνακες όπου ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός πινάκων που χρειάζεται για να είναι υπερκυκλικοί σχετίζεται με την διάσταση του διανυσματικού χώρου. Σε αυτή την κατεύθυνση αποδεικνύουμε ότι ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός πινάκων που χρειάζεται για να αποτελούν μια υπερκυκλική n-άδα στον $\mathbb{R}^n$ είναι n+1, συμπληρώνοντας έτσι ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του N. Feldman.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Οι τοπικά υπερκυκλικοί (ή *J*-class) τελεστές αποτελούν μια κλάση από τελεστές με συγκεκριμένες δυναμικές ιδιότητες. Αυτή η κλάση εισήχθη και μελετήθηκε στην κοινή εργασία με τον Γ. Κωστάκη “ *J-class operators and hypercyclicity* ” [5]. Η έννοια των *J*-class τελεστών μπορεί να ιδωθεί ως μια «τοπικοποίηση» της έννοιας της υπερκυκλικότητας (hypercyclicity). Για μια εκτενή μελέτη και αποτελέσματα σχετικά με τους υπερκυκλικούς τελεστές μπορεί κάποιος να δει το πρόσφατο βιβλίο των Bayart και Matheron [1].

Οι υπερκυκλικές n-άδες γραμμικών τελεστών εισήχθησαν και μελετήθηκαν από τον Feldman στις εργασίες [6], [7] και [8], όπως επίσης και στην [12]. Μια n-άδα από τελεστές είναι μια πεπερασμένη ακολουθία μήκους n από συνεχείς μετατιθέμενους γραμμικούς τελεστές $T_1,T_2,...,T_n$ επί ενός τοπικά κυρτού χώρου $X$. Η n-άδα $(T_1,T_2,...,T_n)$ λέγεται *υπερκυκλική* αν υπάρχει ένα διάνυσμα $x\in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}...T_n^{k_n}x : k_1,k_2,...,k_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

είναι πυκνό στον $X$.

Στην υπό ανάλυση εργασία επεκτείνουμε την έννοια των τοπικά υπερκυκλικών ($J$-class) τελεστών για n-άδες γραμμικών τελεστών ως ακολούθως. Για $x\in X$ ορίζουμε το επεκτεταμένο οριακό σύνολο $J_{(T_1,T_2,...,T_n)}(x)$ ως το σύνολο των σημείων $y\in X$ για τα οποία υπάρχουν μια ακολουθία από διανύσματα $\{x_m\}$ με $x_m\to x$ και ακολουθίες από μη αρνητικούς ακεραίους $\{k_m^{(j)}:m\in\mathbb{N}\}$ για $j=1,2,...,n$ με

$$k_m^{(1)}+k_m^{(2)}+...+k_m^{(n)}\to+\infty$$

έτσι ώστε

$$T_1^{k_m^{(1)}}T_2^{k_m^{(2)}}...T_n^{k_m^{(n)}}x_m\to y.$$

Ας σημειωθεί ότι η συνθήκη $k_m^{(1)}+k_m^{(2)}+...+k_m^{(n)}\to+\infty$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη ότι κάποια από τις ακολουθίες $\{k_m^{(j)}:m\in\mathbb{N}\}$ για $j=1,2,...,n$ έχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο $+\infty$. Επομένως, αυτός ο ορισμός είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τον αντίστοιχο ορισμό των επεκτεταμένων οριακών συνόλων από τη θεωρία των Transformation Groups και των Topological Dynamics. Η n-άδα $(T_1,T_2,...,T_n)$ λέγεται τοπικά υπερκυκλική (ή $J$-class) αν υπάρχει ένα $x\in X\setminus\{0\}$ τέτοιο ώστε $J_{(T_1,T_2,...,T_n)}(x)=X$.

Σε κάθε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, ένας τελεστής δεν μπορεί να είναι υπερκυκλικός (πρβλ [13]) ή $J$-class (πρβλ [5]). Αλλά, όπως δείχθηκε πρόσφατα από τον Feldman στην [8], όταν έχουμε n-άδες γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ η κατάσταση είναι εντελώς διαφορετική. Εκεί δείχθηκε ότι υπάρχουν υπερκυκλικές (n+1)-άδες από διαγώνιους πίνακες στον $\mathbb{C}^n$, καθώς επίσης, και ότι δεν υπάρχουν υπερκυκλικές n-άδες από διαγώνιους πίνακες . Στην υπό ανάλυση εργασία συμπληρώνουμε αυτό το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός διαγώνιων πινάκων που χρειάζεται για να αποτελούν μια υπερκυκλική n-άδα στον $\mathbb{R}^n$ είναι n+1. Θα θέλαμε επίσης να επισημάνουμε ότι όπως δείξαμε στην [3] υπάρχουν άνω τριγωνικοί μη-διαγώνιοι πίνακες που αποτελούν μια υπερκυκλική κ-άδα στον $\mathbb{R}^n$, απαντώντας σε μια σχετική ερώτηση του Feldman.

Στην υπό ανάλυση εργασία κάνουμε μια πρώτη προσπάθεια για την μελέτη των τοπικά υπερκυκλικών n-άδων γραμμικών τελεστών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Πρώτα, δείχνουμε ότι αν μια n-άδα γραμμικών τελεστών είναι υπερκυκλική τότε είναι τοπικά υπερκυκλική. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι υπερκυκλικές n-άδες τελεστών αποτελούν γνήσια υποκλάση αυτής των τοπικά υπερκυκλικών. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός πινάκων που χρειάζεται για να αποτελούν μια τοπικά υπερκυκλική n-άδα είναι **2**. Αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την περίπτωση των υπερκυκλικών n-άδων από πίνακες όπου ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός πινάκων που χρειάζεται για να είναι υπερκυκλικοί σχετίζεται με την διάσταση του διανυσματικού χώρου. Τέλος δίνουμε παραδείγματα από ζευγάρια διαγώνιων πινάκων, όπως επίσης και παραδείγματα από ζευγάρια άνω τριγωνικών μη διαγώνιων πινάκων και πινάκων σε μορφή Jordan που είναι τοπικά υπερκυκλικά αλλά όχι υπερκυκλικά. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι κατασκευές μας μπορούν να γενικευτούν άμεσα σε άπειρες διαστάσεις, όπως δείχνουμε σχετικά στην παρούσα εργασία.

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) K. –G. Grosse Erdmann and A. P. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Universitext, Springer, 2011.

(2) G. Costakis and I. Parissis, *Dynamics of tuples of matrices in Jordan normal form*, preprint arXiv:1003.5321.

(3) M. Javaheri, *Topologically transitive semigroup actions of real linear fractional transformations,* J. Math. Anal. Appl. **368** (2010), 587-603.

(4) A. Ayadi and H. Marzougui, *J-class abelian semigroups of matrices on $C^n$ and Hypercyclicicty*, arXiv: 1105.1473.

(5) A. Ayadi, *Hypercyclic abelian semigroup of matrices on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{R}^n$ and k-transitivity* $(k \geq 2)$, preprint.

(6) C.T.J. Dodson, *A review of some recent work on hypercyclicity*, preprint.

**Βιβλιογραφία**


[1] F. Bayart and É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] T Bermúdez and N. J. Kalton, *The range of operators of von Neumann algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1447-1455.

[3] G. Costakis, D. Dadjiloucas and A. Manoussos, *Dynamics of tuples of matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1025-1034.

[4] G. Costakis and A. Manoussos, *J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers,* Integral Equations Operator Theory **62** (2008), 149-158.

[5] G. Costakis and A. Manoussos, *J-class operators and hypercyclicity,* to appear in J. Operator Theory.

[6] N. S. Feldman, *Hypercyclic Tuples of Operators,* Oberwolfach Reports, Vol. 3, no. 3 (2006), 2254-2276.

[7] N. S. Feldman, *Hypercyclic pairs of coanalytic Toeplitz operators,* Integral Equations Operator Theory **58** (2007), 153-173.

[8] N. S. Feldman, *Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits,* J. Math. Anal. Appl. **346** (2008), 82-98.

[9] O. Hájek, *Prolongations in topological dynamics,* in: Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, II, Univ. Maryland, College Park, Md., 1969, in: Lecture Notes in Math., vol. **144**, Springer, Berlin, 1970.

[10] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications 5th Edition, 1979.

[11] L. Kérchy, *Cyclic properties and stability of commuting power bounded operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 299-312.

[12] M. Javaheri, *Semigroups of matrices with dense orbits*, Dyn. Syst. 26 (3) (2011), 235-243.

[13] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Dissertation, University of Toronto (1982).

**[13] Dynamics of tuples of matrices, Proceedings A.M.S. 137 (2009), 1025-1034, από κοινού με τους Γ. Κωστάκη και Δ. Χατζηλουκά.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία απαντάμε σε ένα ερώτημα του N. Feldman στην [4] σχετικά με τη δυναμική n-άδων γραμμικών τελεστών στον $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ υπάρχουν n-άδες $(A_1, A_2, ..., A_n)$ από μη ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμους $n \times n$ πίνακες επί του $\mathbb{R}$ που είναι υπερκυκλικές. Επίσης, παραθέτουμε σχετικά αποτελέσματα για n-άδες $2 \times 2$ πινάκων επί του $\mathbb{R}$ η του $\mathbb{C}$ που είναι σε μορφή Jordan.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Ακολουθώντας την πρόσφατη εργασία του Feldman [4], μια n-άδα από τελεστές είναι μια πεπερασμένη ακολουθία μήκους n από συνεχείς μετατιθέμενους γραμμικούς τελεστές $T_1, T_2, ..., T_n$ επί ενός τοπικά κυρτού χώρου $X$. Η n-άδα $(T_1, T_2, ..., T_n)$ λέγεται *υπερκυκλική* αν υπάρχει ένα διάνυσμα $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\{T_1^{k_1} T_2^{k_2} ... T_n^{k_n} x : k_1, k_2, ..., k_n \geq 0\}$$

είναι πυκνό στον $X$. Ένα τέτοιο διάνυσμα λέγεται υπερκυκλικό για την $(T_1, T_2, ..., T_n)$ και το σύνολο όλων των υπερκυκλικών διανυσμάτων για την $(T_1, T_2, ..., T_n)$ θα συμβολίζεται με $HC((T_1, T_2, ..., T_n))$. Τα παραπάνω αποτελούν μια γενίκευση της γνωστής έννοιας της υπερκυκλικότητας για ένα γραμμικό φραγμένο τελεστή. Για περισσότερα αποτελέσματα, σχόλια και για μια εκτενή βιβλιογραφία σχετικά με την έννοια της υπερκυκλικότητας μπορεί κανείς να ανατρέξει στις εργασίες [1], [5], [6] και [7]. Για αποτελέσματα σχετικά με τη δυναμική n-άδων γραμμικών τελεστών μπορεί κανείς να ανατρέξει στις εργασίες [2], [3], [4] και [9].

Στην [4] ο Feldman έδειξε, ανάμεσα στα άλλα, ότι στον $\mathbb{C}^n$ υπάρχουν n+1-άδες από ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες πίνακες που έχουν πυκνές τροχιές. Επιπλέον, έδειξε ότι *δεν* υπάρχουν n-άδες από ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες πίνακες στον $\mathbb{R}^n$ ή στον $\mathbb{C}^n$ που έχουν somewhere dense τροχιές. Επομένως, εύλογα ανακύπτει το ακόλουθο

**Ερώτημα (Feldman [4])** *Υπάρχουν μη διαγωνοποιήσιμες n-άδες στον* $\mathbb{R}^k$ *που έχουν somewhere dense τροχιές;*

Στην εργασία αυτή απαντάμε θετικά στο παραπάνω ερώτημα αποδεικνύοντας το ακόλουθο *ισχυρότερο* θεώρημα.

**Θεώρημα** *Για κάθε θετικό ακέραιο* $n \geq 2$ *υπάρχουν n-άδες* $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *από* $n \times n$ *μη ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμους πίνακες επί του* $\mathbb{R}$ *που είναι υπερκυκλικές.*

Περιοριζόμενοι στην περίπτωση των $2 \times 2$ πινάκων επί του $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ δείχνουμε, επίσης, τα ακόλουθα.

**Θεώρημα** *Υπάρχουν* $2 \times 2$ *πίνακες* $A_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ *σε μορφή Jordan επί του* $\mathbb{R}$ *έτσι ώστε η τετράδα* $(A_1, A_2, A_3, A_4)$ *να είναι υπερκυκλική. Πιο συγκεκριμένα*

$$HC((A_1, A_2, A_3, A_4)) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0 \right\}.$$

**Θεώρημα** *Υπάρχουν* $2 \times 2$ *πίνακες* $A_j$, $j = 1, 2, ..., 8$ *σε μορφή Jordan επί του* $\mathbb{C}$ *έτσι ώστε η οχτάδα* $(A_1, A_2, ..., A_8)$ *να είναι υπερκυκλική.*

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**


(1) M. Javaheri, *Semigroups of matrices with dense orbits,* Dyn. Syst. **26** (3) (2011), 235-243.

(2) M. Javaheri, *Dense 2-generator subsemigroups of* $2 \times 2$ *matrices*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 103-113.

(3) G. Costakis and I. Parissis, *Dynamics of tuples of matrices in Jordan normal form*, preprint arXiv:1003.5321.

(4) A. Ayadi, *Hypercyclic abelian semigroup of matrices on* $\mathbb{C}^n$ *and* $\mathbb{R}^n$ *and k-transitivity* $(k \geq 2)$, preprint.

(5) C.T.J. Dodson, *A review of some recent work on hypercyclicity*, preprint.


**Βιβλιογραφία**


[1] Bayart F. and Matheron É., Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] Feldman N. S., Hypercyclic Tuples of Operators, Oberwolfach Reports, Vol. 3, no. 3 (2006), 2254-2276.

[3] Feldman N. S., *Hypercyclic pairs of coanalytic Toeplitz operators,* Integral Equations Operator Theory **58** (2007), 153-173.

[4] Feldman N. S., *Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits,* J. Math. Anal. Appl. **346** (2008), 82-98.

[5] Grosse-Erdmann K. -G., *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345-381.

[6] Grosse-Erdmann K. -G., *Recent developments in hypercyclicity*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. (2003), 273-286.
[7] Grosse-Erdmann K. -G., *Dynamics of linear operators*, Topics in complex analysis and operator theory, 41-84, Univ. Malaga, Malaga, 2007.
[8] Hardy G. H. and Wright E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications 5th Edition, 1979.
[9] Kérchy L., *Cyclic properties and stability of commuting power bounded operators,* Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 299-312.

**[14] J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers, Integral Equations and Operator Theory 62 (2008) 149-158, από κοινού με τον Γ. Κωστάκη.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία δίνουμε έναν *πλήρη χαρακτηρισμό* των *J*-class και $J^{mix}$-class unilateral weighted shifts στον $l^{\infty}(\mathbb{N})$ σε σχέση με τις ακολουθίες των βαρών τους. Σε αντιδιαστολή με το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνουμε ότι ένα bilateral weighted shift στον $l^{\infty}(\mathbb{Z})$ δεν μπορεί να είναι ένας *J*-class τελεστής.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Για όλες τις έννοιες και τους αντίστοιχους ορισμούς παραπέμπουμε για λόγους συντομίας στην ανάλυση τις εργασίας με τίτλο “ *J*-class operators and hypercyclicity”. Υπενθυμίζουμε ότι:

*Τα παρακάτω οριακά σύνολα περιγράφουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών τοπικά γύρω από ένα διάνυσμα $x \in X$ .*

**Ορισμός** *Το σύνολο*

$$J(x) := \{y \in X : \text{υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών } \{k_n\} \text{ και μια ακολουθία } \{x_n\} \text{ τέτοια ώστε } x_n \to x \text{ και } T^{k_n} x_n \to y\}$$

*λέγεται το επεκτεταμένο (extended ή prolongational) οριακό σύνολο του* $x$ *και το σύνολο*

$$J^{mix}(x) := \{y \in X : \text{υπάρχει μια ακολουθία } \{x_n\} \text{ τέτοια ώστε } x_n \to x \text{ και } T^n x_n \to y\}$$

*λέγεται το επεκτεταμένο mixing οριακό σύνολο του* $x$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν χαρακτηρισμό των οριακών συνόλων χρησιμοποιώντας ανοικτά υποσύνολα του $X$ .

**Πρόταση** *Έστω* $x \in X$ *, τότε*

$J(x)=\{y\in X :$ για κάθε ζεύγος περιοχών $U,V$ των $x,y$ αντίστοιχα, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε $T^nU\cap V\neq\varnothing\}$

*και*

$J^{mix}(x)=\{y\in X :$ για κάθε ζεύγος περιοχών $U,V$ των $x,y$ αντίστοιχα, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N$ έτσι ώστε $T^nU\cap V\neq\varnothing$ για κάθε $n\geq N\}$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μερικές χρήσιμες ιδιότητες των οριακών συνόλων.

**Πρόταση** *Για κάθε $x\in X$ τα σύνολα $J(x)$ και $J^{mix}(x)$ είναι κλειστά και αμετάβλητα. Επιπλέον, το σύνολο $J^{mix}(x)$ είναι κυρτό και το σύνολο $J^{mix}(0)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $X$ .*

**Ορισμός** *Ένας τελεστής $T:X\to X$ λέγεται τοπολογικά mixing αν για κάθε ζεύγος μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων $U,V$ του $X$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N$ έτσι ώστε $T^nU\cap V\neq\varnothing$, για κάθε $n\geq N$ .*

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $T$ είναι τοπολογικά μεταβατικός αν και μόνο αν $J(x)=X$ για κάθε $x\in X$ και είναι τοπολογικά mixing αν και μόνο αν $J^{mix}(x)=X$ για κάθε $x\in X$ .

Ένα πρώτο βήμα στην κατανόηση της δυναμικής των γραμμικών τελεστών είναι να μελετήσουμε συγκεκριμένες κλάσεις τελεστών όπως για παράδειγμα τα weighted shifts. O Salas [11] ήταν ο πρώτος που χαρακτήρισε τα υπερκυκλικά weighted shifts σε σχέση με τις ακολουθίες των βαρών τους. Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι οι χώροι $l^\infty(\mathbb{N})$ και $l^\infty(\mathbb{Z})$ δεν δέχονται υπερκυκλικούς τελεστές μιας και δεν είναι διαχωρίσιμοι χώροι Banach. Στην πραγματικότητα δεν δέχονται ούτε τοπολογικά μεταβατικούς τελεστές όπως δείχτηκε από τους Bermúdez και Kalton στην [2]. Τα αποτελέσματα της υπό ανάλυση εργασίας είναι τα ακόλουθα.

**Θεώρημα** *Έστω $T:l^\infty(\mathbb{N})\to l^\infty(\mathbb{N})$ ένα backward unilateral weighted shift με θετικά βάρη $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Ο $T$ είναι ένας J-class τελεστής.*

*(ii)* $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{j\geq 0}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{i+j}\right)=+\infty.$

*Επιπλέον, αν ο $T$ είναι ένας J-class τελεστής τότε η ακολουθία των βαρών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη από κάτω από ένα θετικό αριθμό και έχουμε την ακόλουθο πλήρη περιγραφή του συνόλου των J-διανυσμάτων:*

$$\{x\in l^\infty(\mathbb{N}) : J(x)=l^\infty(\mathbb{N})\}=c_0(\mathbb{N})$$

*όπου* $c_0(\mathbb{N}) := \{x = \{x_n\} \in l^\infty(\mathbb{N}) \ : \ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$.

**Παρατήρηση** Ας σημειωθεί ότι, όπως δείχνουμε με ένα παράδειγμα υπάρχει ένα υπερκυκλικό backward unilateral weighted shift στον $l^2(\mathbb{N})$ που δεν είναι J-class τελεστής στον $l^\infty(\mathbb{N})$. Ενώ, όπως δείχνουμε στην [5], *ένα backward unilateral (ή bilateral) weighted shift είναι ένας J-class τελεστής στον* $l^p(\mathbb{N})$ *αν και μόνο αν ο* $T$ *είναι υπερκυκλικός στον* $l^p(\mathbb{N})$, *για* $1 \le p < +\infty$.

**Θεώρημα** *Αν* $T : l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ *είναι ένα backward bilateral weighted shift με θετικά βάρη* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *τότε δεν είναι ένας J-class τελεστής.*

**Πόρισμα** *Έστω* $T$ *ένα backward unilateral (bilateral) weighted shift με ακολουθία βαρών* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *αντίστοιχα). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*(i)* $J(0) = l^\infty(\mathbb{N})$ $(J(0) = l^\infty(\mathbb{Z}))$.

*(ii)* $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{j\ge 0}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{i+j}\right) = +\infty$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{j\in\mathbb{Z}}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{i+j}\right) = +\infty\right)$.

**Παρατήρηση** Από το προηγούμενο θεώρημα και το πόρισμα προκύπτει ότι αν $T$ είναι ένα backward unilateral weighted shift και $J(0) = l^\infty(\mathbb{N})$ τότε ο $T$ είναι ένας J-class τελεστής. Στην περίπτωση που ο $T$ είναι ένα backward bilateral weighted shift τότε, όπως δείχνουμε με ένα παράδειγμα, το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι απαραίτητα σωστό.

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για την περίπτωση των $J^{mix}$-class weighted shifts στον $l^\infty(\mathbb{N})$:

**Θεώρημα** *Έστω* $T : l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})$ *ένα backward unilateral weighted shift με θετικά βάρη* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Ο* $T$ *είναι ένας* $J^{mix}$*-class τελεστής.*

*(ii)* $\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{j\ge 0}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{i+j}\right) = +\infty.$

*Επιπλέον, αν ο* $T$ *είναι ένας* $J^{mix}$*-class τελεστής τότε έχουμε την ακόλουθο πλήρη περιγραφή του συνόλου των* $J^{mix}$*-διανυσμάτων:*

$$\{x \in l^\infty(\mathbb{N}) : J^{mix}(x) = l^\infty(\mathbb{N})\} = c_0(\mathbb{N})$$

*όπου* $c_0(\mathbb{N}) := \{x = \{x_n\} \in l^\infty(\mathbb{N}) \ : \ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$.

**Πόρισμα** *Έστω* $T : l^\infty(\mathbb{N}) \to l^\infty(\mathbb{N})$ *ένα backward unilateral weighted shift με θετικά βάρη* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Ο* $T$ *είναι ένας* $J^{mix}$ *-class τελεστής.*

*(ii)* *Ο* $T$ *είναι ένας J-class τελεστής.*

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) K. C. Chan and I. Seceleanu, *Hypercyclicity of shifts as a zero-one law of orbital limit points,* J. Operator Theory **67** (2012), 215-236.

**Βιβλιογραφία**


[1] Bayart F. and Matheron É., Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] Bermúdez T. and Kalton N. J., *The range of operators on von Neumann algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1447-1455.

[3] Bès J., Chan K. C. and Sanders R., *Weak* Hypercyclicity and Supercyclicity of Shifts on* $l^\infty$, Integral Equations Operator Theory **55** (2006), 363-376.

[4] Bonet J., Martínez-Giménez F. and Peris A., *Linear chaos on Frechet spaces,* Dynamical systems and functional equations (Murcia, 2000). Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), 1649-1655.

[5] Costakis G. and Manoussos A., *J-class operators and hypercyclicity,* J. Operator Theory, to appear.

[6] González M., León-Saavedra F. and Montes-Rodríguez A., *Semi-Fredholm theory: hypercyclic and supercyclic subspaces*, Proc. London. Math. Soc. **81** (2000), 169-189.

[7] Grosse-Erdmann K. -G., *Universal families and hypercyclic operators,* Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345-381.

[8] Grosse-Erdmann K. -G., *Recent developments in hypercyclicity,* RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. (2003), 273-286.

[9] Grosse-Erdmann K. -G., *Dynamics of linear operators,* preprint.

[10] Montes-Rodríguez A. and Salas H. N., *Supercyclic subspaces*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 721-737.

[11] Salas H. N., *Hypercyclic weighted shifts,* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[12] Shapiro J. H., *Notes on the Dynamics of Linear Operators,* Unpublished Lecture Notes, (available at www.math.msu.edu/~shapiro).


**[15] On embeddings of proper and equicontinuous actions in zero-dimensional compactifications, Transactions A.M.S. 359 (2007), 5593-5609, από κοινού με τον Π. Στράντζαλο.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία δίνουμε ένα *νέο εργαλείο* για την μελέτη των γνησίως μη συνεκτικών (properly discontinuous) δράσεων μη συμπαγών ομάδων επί τοπικά συμπαγών, συνεκτικών και παρασυμπαγών χώρων, εμβαπτίζοντας μια τέτοια δράση σε μια κατάλληλη μηδενοδιάστατη συμπαγοποίηση του υποκείμενου χώρου με «καλές ιδιότητες». Συγκεκριμένα, δοθείσης μιας δράσης $(G,X)$ κατασκευάζουμε μια μηδενοδιάστατη συμπαγοποίηση $\mu X$ του $X$ (δηλαδή ο επισυναπτόμενος χώρος $\mu X \setminus X$ είναι ολικά μη συνεκτικός) με τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) η δράση επεκτείνεται (συνεχώς) στην $\mu X$, (β) αν $\mu L \subseteq \mu X \setminus X$ είναι το σύνολο των οριακών σημείων των τροχιών της αρχικής δράσης, τότε ο περιορισμός της δράσης $(G, \mu X \setminus \mu L)$ παραμένει γνησίως μη συνεκτική (properly discontinuous), είναι αδιαίρετη (indivisible) και κατά σημείο ισοσυνεχής ως προς την ομαλή δομή που επάγει η συμπαγοποίηση $\mu X$ στον $\mu X \setminus X$, και (γ) η συμπαγοποίηση $\mu X$ είναι η μέγιστη δυνατή μηδενοδιάστατη συμπαγοποίηση του $X$ με τις παραπάνω ιδιότητες. Οι γνήσιες δράσεις συνήθως εμβαπτίζονται στην end point (ή Freudenthal) συμπαγοποίηση του $X$ ώστε να εξαχθούν τοπολογικά invariants που αφορούν το πλήθος των περάτων του $X$, με την υπόθεση ότι ο χώρος $X$ έχει μια επιπλέον «καλή» ιδιότητα σχετικά τοπικού χαρακτήρα (την «ιδιότητα Ζ», δηλαδή κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X$ περιέχεται σε ένα συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολό του, αυτό ισχύει αν π.χ. ο $X$ είναι τοπικά συνεκτικός). Αν ο υπόψιν χώρος $X$ έχει αυτή την ιδιότητα τότε η καινούρια μας συμπαγοποίηση συμπίπτει με την end point συμπαγοποίηση του $X$. Από την άλλη, δίνουμε ένα παράδειγμα ενός χώρου που δεν έχει την «ιδιότητα Ζ» για τον οποίο η συμπαγοποίηση μας είναι διαφορετική της end point. Σαν εφαρμογή δείχνουμε ότι το τοπολογικό invariant που αφορά το πλήθος των περάτων του $X$ ισχύει για μια κλάση δράσεων που περιέχει γνήσια την κλάση των γνησίως μη συνεκτικών δράσεων και για χώρους που δεν έχουν κατ' ανάγκη την «ιδιότητα Ζ». Ας σημειωθεί ότι η κατασκευή της νέας αυτής συμπαγοποίησης γίνεται με μία *νέα μέθοδο*. Συγκεκριμένα προκύπτει παίρνοντας την αρχική δράση ως αντίστροφο όριο γνησίως μη συνεκτικών δράσεων της $G$ πάνω σε πολύεδρα που «κατασκευάζονται» μέσω $G$- αμετάβλητων τοπικά πεπερασμένων ανοιχτών καλύψεων του $X$ που παράγονται από τοπικά πεπερασμένες ανοιχτές καλύψεις ενός κατάλληλου «θεμελιώδους συνόλου» (fundamental set) της δράσης.

### *ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Η συμπαγοποίηση των τοπικά συμπαγών (κυρίως συνεκτικών) τοπολογικών χώρων ήταν ένα από τα πρώτα και, όπως αποδείχθηκε, γόνιμα «εργαλεία» για τη μελέτη τους. Κάτι ανάλογο επιχειρήθηκε έμμεσα (ήδη από το 1934) στη θεωρία των δράσεων από τον Kerékjártó [2], ο οποίος μελέτησε ομάδες ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}^2$ εμβαπτίζοντας τις αντίστοιχες δράσεις στη σφαίρα, τη συμπαγοποίηση με ένα σημείο του επιπέδου.

Μολονότι η εμβάπτιση δράσεων (κυρίως των γνήσιων) έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη μέχρι τώρα έρευνα (πρβλ. π.χ. [1] και [4]) και έχουν αποδειχθεί υπαρξιακού τύπου θεωρήματα για την εμβάπτιση δράσεων σε συμπαγοποιήσεις (π.χ. για δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων, πρβλ. [5]), το ενδιαφέρον θέμα της πιο πρόσφορης επιλογής μιας συμπαγοποίησης του υποκείμενου χώρου για χρήσιμες κατηγορίες δράσεων δεν έχει αντιμετωπισθεί επαρκώς.

**Ορισμός** *Έστω $(G,X)$ μια συνεχής δράση μιας τοπολογικής ομάδας επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου. Η δράση λέγεται γνήσια (proper) αν η απεικόνιση $G\times X \to X\times X$ με $(g,x)\mapsto(x,gx)$ είναι γνήσια, δηλαδή, αν είναι κλειστή απεικόνιση και η αντίστροφη εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου είναι ένα συμπαγές σύνολο, ή ισοδύναμα, αν τα σύνολα*

$$J(x)=\{y\in X \mid \text{υπάρχουν δίκτυα } x_i\to x \text{ στον } X \text{ και } g_i\to\infty \text{ στην } G \text{ ώστε } g_ix_i\to y\}$$

*είναι κενά για κάθε $x\in X$, όπου $g_i\to\infty$ εδώ σημαίνει ότι το δίκτυο δεν έχει σημεία συσσώρευσης στην $G$.*

Οι γνήσιες δράσεις αποτελούν μία από τις πιο ενδιαφέρουσες κλάσεις δράσεων, τουλάχιστον διότι περιέχει τις δράσεις των ομάδων ισομετριών τοπικά συμπαγών και συνεκτικών μετρικών χώρων. Οι γνήσιες δράσεις πρωτοεμφανίστηκαν στην ειδική (και ιδιαίτερα χρήσιμη για τη γεωμετρική έρευνα) περίπτωση των *γνησίως μη συνεκτικών* (properly discontinuous) δράσεων, οι οποίες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη θεωρία *των* «χώρων επικάλυψης» (covering spaces) και ορίζονται από την απαίτηση: για κάθε δύο σημεία $x,y\in X$ υπάρχουν περιοχές τους $U_x,U_y$, αντίστοιχα, τέτοιες, ώστε το σύνολο $\{g\in G \mid (gU_x)\cap U_y\neq\varnothing\}$ να είναι πεπερασμένο. [Αν η $G$ είναι τοπικά συμπαγής, η απαίτηση το σύνολο αυτό να έχει συμπαγή θήκη στην $G$ είναι ισοδύναμη με την: $J(x)=\varnothing$ για κάθε $x\in X$, δηλαδή με τη γνησιότητα της δράσης.]

Κάθε δράση μιας συμπαγούς ομάδας είναι γνήσια, αφού τα $J$-σύνολα είναι κατά τετριμμένο τρόπο κενά. Αν περιορισθούμε σε μη συμπαγείς χώρους, η ύπαρξη μιας δράσης μιας συμπαγούς ομάδας δεν οδηγεί, γενικά, σε δομικές πληροφορίες για τον χώρο· για παράδειγμα, κάθε τοπικά συμπαγής και συνεκτικός χώρος δέχεται μία δράση μιας μη τετριμμένης συμπαγούς ομάδας (πρβλ. [4]). Αντίθετα, η ύπαρξη μιας γνήσιας δράσης μιας μη συμπαγούς ομάδας (οπότε ο χώρος θα είναι αναγκαστικά μη συμπαγής) οδηγεί σε ενδιαφέρουσες δομικές πληροφορίες:

Όπως προκύπτει από τον ορισμό της, μία γνήσια δράση χαρακτηρίζεται από τη μη ύπαρξη σημείων συσσώρευσης για δίκτυα $\{g_ix_i\}$ με $x_i\to x$ και $g_i\to\infty$. Το θεμελιώδες αυτό χαρακτηριστικό προτείνει την εμβάπτισή μιας γνήσιας δράσης σε μία συμπαγοποίηση $Y$ του χώρου $X$, με την ελπίδα η μελέτη των $J$-συνόλων που θα προκύψουν στον υπόχωρο $Y\setminus X$ να οδηγήσει σε πληροφορίες για τον $X$ και τη δράση, ή σε «αναλλοίωτα» για το ζευγάρι χώρος-δράση. Αυτό έχει συμβεί για $Y=X^+$, τη *συμπαγοποίηση του $X$ με τα πέρατα* (end point ή Freudenthal compactification). Η συμπαγοποίηση αυτή έχει δύο βασικά πλεονεκτήματα:

(α) ο $X$ δεν «χάνεται» στον $X^+$, αφού ο $X^+\setminus X$ είναι «ολικά μη συνεκτικός» χώρος, και

(β) για συνεκτικούς χώρους οι δράσεις $(G,X)$ επεκτείνονται (συνεχώς) σε δράσεις $(G,X^+)$, αφού ο $X^+$ είναι ο χώρος-πηλίκο της «συμπαγοποίησης Stone-Čech», $\beta X$, του $X$ στον οποίο μία συνεκτική συνιστώσα του $\beta X\setminus X$ συρρικνώνεται σε ένα σημείο· πρόκειται για τη «μέγιστη» συμπαγοποίηση του X με «ολικά μη συνεκτικό» επισυναπτόμενο χώρο (οι συμπαγοποιήσεις «διατάσσονται» ως εξής: μία συμπαγοποίηση είναι «μεγαλύτερη» από μία άλλη, αν υπάρχει μία απεικόνιση της πρώτης επί τη δεύτερη που επεκτείνει την ταυτοτική απεικόνιση του $X$ ).

Ας σημειωθεί ότι το (β) δεν είναι δεδομένο για όλες τις «μηδενοδιάστατες συμπαγοποιήσεις» του X, δηλαδή για τις συμπαγοποιήσεις με «ολικά μη συνεκτικό» επισυναπτόμενο χώρο.

Αν μείνουμε στις γνήσιες δράσεις μη συμπαγών ομάδων και θέλουμε να τις αξιοποιήσουμε κυρίως για τη διερεύνηση τη δομής τοπικά συμπαγών, συνεκτικών χώρων και την εύρεση «αναλλοιώτων» τους, οι επόμενες ιδιότητες δύσκολα μπορούν να αγνοηθούν ως κριτήρια για την επιλογή της εκάστοτε προτιμότερης «μηδενοδιάστατης συμπαγοποίησης», $Y$, του $X$ :

(1) Η θεωρούμενη δράση $(G,X)$ επεκτείνεται (συνεχώς) σε μία δράση $(G,Y)$.

(2) Αν $\Im$ είναι το σύνολο των οριακών σημείων της αρχικής δράσης στον $Y$, δηλαδή, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης στον $Y$ για δίκτυα $\{g_i x\}$ με $g_i \to \infty$ και $x \in X$ , τότε η δράση $(G, Y \setminus \Im)$ παραμένει γνήσια.

(3) Η δράση $(G, Y \setminus \Im)$ είναι κατά σημείο ισοσυνεχής ως προς την επαγόμενη ομαλή δομή στον $Y \setminus \Im \supset X$ από εκείνη του $Y$ (ώστε σε συνδυασμό με την (2) να είναι αξιοποιήσιμα τα «εργαλεία» της Θεωρίας των Ισοσυνεχών Δράσεων, με τις «ανωμαλίες» ως προς τη δομή αυτή να απωθούνται στον υπόχωρο $\Im$ του $Y \setminus X$ , απ' όπου θα αντληθούν χρήσιμες πληροφορίες ή/και τα «αναλλοίωτα»).

(4) Έστω $\{g_i\}$ ένα δίκτυο χωρίς οριακά σημεία στην $G$ και $x \in Y \setminus \Im$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g_i x \to y \in \Im$, τότε ισχύει $g_i z \to y$ για κάθε $z \in Y \setminus \Im$. Μία εμβάπτιση της $(G, Y \setminus \Im)$ στην $(G,Y)$ με την ιδιότητα αυτή λέγεται *αδιαίρετη* (indivisible).

[Τα δύο αποκλίνοντα δίκτυα $\{g_i\}$ και $\{g_i x\}$ συσχετίζουν τις δομές των $G$ και $Y \setminus \Im$ · επομένως, προκειμένου να αντληθούν πληροφορίες για τον $Y \setminus \Im$ από την $G$ και τη γνησιότητα της δράσης, είναι ευπρόσδεκτο το ότι το οριακό σημείο $y$ είναι ανεξάρτητο από το $x$ και εξαρτάται μόνο από το δίκτυο $\{g_i\}$: τα στοιχεία $y$ του $\Im$ (που περιέχει τις πληροφορίες) «φαίνονται» στην $G$ ως δίκτυα $\{g_i\}$.]

(5) Η «μηδενοδιάστατη συμπαγοποίηση» $Y$ είναι η «μέγιστη» δυνατή με τις τέσσερις προηγούμενες ιδιότητες (ώστε, με δεδομένα τα «εργαλεία» που προσφέρουν οι τέσσερις αυτές ιδιότητες, να μη χάνονται πληροφορίες, λόγω μη αναγκαίας «συμπίεσης» του $\Im$).

Ας σημειωθεί ότι οι ιδιότητες (1)-(4) συναντώνται στη βιβλιογραφία και έχουν οδηγήσει σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για γνήσιες δράσεις μη συμπαγών ομάδων: η (4), συνδυασμένη με την υπόθεση ότι η θεωρούμενη δράση επεκτείνεται σε μια δράση η οποία δεν είναι κατά σημείο ισοσυνεχής (ως προς κάποια ομαλή δομή) ακριβώς στα σημεία του $\mathfrak{I}$, οδηγεί στο συμπέρασμα *ότι «τα σημεία του* $\mathfrak{I}$ *είναι* 1, 2 *ή άπειρα το πλήθος»*, ένα «αναλλοίωτο» για το ζευγάρι χώρος-δράση (πρβλ. [3]), ενώ ο συνδυασμός των (1), (2) και (4) οδηγεί (π.χ. στις [1] και [4]) στο ίδιο συμπέρασμα (για $Y = X^+$), υπό την προϋπόθεση ότι ο $X$ έχει την *ιδιότητα* $Z$ (: κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X$ περιέχεται σε ένα συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολό του, αυτό ισχύει αν π.χ. ο $X$ είναι τοπικά συνεκτικός).

Στην υπό ανάλυση εργασία, δίνεται ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η δράση $(G, X^+ \setminus \mathfrak{I})$ δεν είναι απαραίτητο να είναι γνήσια ή κατά σημείο ισοσυνεχής, αν ο χώρος δεν έχει την ιδιότητα Z. Αυτό, το ισχυρό «οπλοστάσιο» της Θεωρίας των Ισοσυνεχών Δράσεων και τα μεθοδολογικά πλεονεκτήματα που προστίθενται από την ιδιότητα (4), οδήγησαν στο επόμενο ερώτημα, το «βάρος» του οποίου έγκειται στο ότι μια θετική απάντησή του θα δώσει ένα καινούργιο διευρυμένο πλαίσιο «εργαλείων» για τη μελέτη των γνήσιων δράσεων.

> **Ερώτημα:** *Έστω ότι η μη συμπαγής ομάδα* $G$ *δρα γνησίως* στον *τοπικά συμπαγή, συνεκτικό και παρασυμπαγή χώρο* $X$. *Υπάρχει μία «μηδενοδιάστατη συμπαγοποίηση» του* $X$ *με τις ιδιότητες (1)-(5);*

Στην εν λόγω εργασία αποδεικνύεται ότι, ειδικά για τις γνησίως μη συνεκτικές δράσεις, υπάρχει *πάντα* μία τέτοια συμπαγοποίηση. Η κατασκευή της νέας αυτής συμπαγοποίησης γίνεται με μία *νέα μέθοδο*. Συγκεκριμένα προκύπτει παίρνοντας την αρχική δράση ως αντίστροφο όριο γνησίως μη συνεκτικών δράσεων της $G$ πάνω σε πολύεδρα που «κατασκευάζονται» μέσω $G$- αμετάβλητων τοπικά πεπερασμένων ανοιχτών καλύψεων του $X$ που παράγονται από τοπικά πεπερασμένες καλύψεις ενός κατάλληλου «θεμελιώδους συνόλου» (fundamental set) της δράσης. Ας σημειωθεί ότι αν ο $X$ έχει την ιδιότητα Z η συμπαγοποίηση αυτή ταυτίζεται με την $X^+$.

Ως εφαρμογή των μεθοδολογικών πλεονεκτημάτων που προκύπτουν από την ύπαρξη μιας τέτοιας συμπαγοποίησης του $X$ αποδεικνύονται τα κύρια συμπεράσματα των [1] και [3] που προαναφέρθηκαν για χώρους που δεν είναι απαραίτητο να έχουν την ιδιότητα Z και για μία κλάση γνήσιων δράσεων που περιέχει τις γνησίως μη συνεκτικές δράσεις. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

**Θεώρημα** *Έστω* $X$ *ένας τοπικά συμπαγής, συνεκτικός και παρασυμπαγής χώρος και* $G$ *μια μη συμπαγής τοπολογική ομάδα που δρα γνησίως επί του* $X$ *τέτοια ώστε η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας* $G_0$ *της* $G$ *είναι μη συμπαγής είτε η* $G_0$ *είναι συμπαγής και ο χώρος πηλίκο των συνεκτικών συνιστωσών* $G/G_0$ *της* $G$ *περιέχει μια άπειρη διακριτή υποομάδα. Τότε ο* $X$ *έχει*

*(i)* *το πολύ δύο ή άπειρα το πλήθος πέρατα, και*

*(ii)* *το πολύ δύο πέρατα αν η* $G_0$ *είναι μη συμπαγής.*

**Βιβλιογραφία**


[1] Abels, H., *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Commentarii Math. Helvetici **47** (1972), 457-473.

[2] Kerékjártó B. von, *Topologische Charakterizierung der linearen Abbildungen*, Act. Lit. Scient. (Szeged) **6** (1932-34), 235-262.

[3] Lam, P. F., *Almost equicontinuous transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **195** (1974), 165-200.

[4] Strantzalos, P., *Kompaktheitseigenschaften der Gruppe der Isometrien metrischer Räume*, Archiv Math. **33** (1979), 66-75.

[5] Vries, J. de, *On the existence of G-compactifications*, Bull. Acad. Polon. **26** (1978), 275-280.


**[16] On the group of isometries on a locally compact metric space, Journal of Lie Theory 13 (2003) 7-12, από κοινού με τον Π. Στράντζαλο.**


*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία μελετάμε συνθήκες υπό τις οποίες η ομάδα των ισομετριών $I(X,d)$ ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου $(X,d)$ είναι τοπικά συμπαγής ή δρα γνησίως επί του $X$.


*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Στην εργασία αυτή *ολοκληρώνεται η λύση ενός παλαιού προβλήματος* που αφορά την τοπική συμπάγεια τις ομάδας των ισομετριών ενός τοπικά συμπαγούς μετρικού χώρου καθώς και του τρόπου δράσης αυτής της ομάδας πάνω στο χώρο (van Dantzig, van der Waerden (1928) [1], Π. Στράντζαλος (1989) [6]).

Η λύση του προβλήματος, στη γενικότητά του, σχετίζεται με ιδιότητες συνεκτικότητας του χώρου, δηλαδή κατά πόσο έχει συμπαγή χώρο συνεκτικών ή ημισυνεκτικών συνιστωσών, και επίσης με το κατά πόσο η αντίστοιχη ομάδα των ισομετριών του χώρου είναι κλειστή στο χώρο των συνεχών απεικονίσεων του χώρου στον εαυτό του σε σχέση με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης. Θυμίζουμε ότι

**Ορισμός** *Έστω $(G,X)$ μια συνεχής δράση μιας τοπολογικής ομάδας επί ενός τοπικά συμπαγούς χώρου. Η δράση λέγεται γνήσια (proper) αν η απεικόνιση $G\times X \to X\times X$ με $(g,x)\mapsto (x,gx)$ είναι γνήσια, δηλαδή, αν είναι κλειστή απεικόνιση και η αντίστροφη εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου είναι ένα συμπαγές σύνολο,ή ισοδύναμα, αν τα σύνολα*

$$J(x)=\{y\in X \mid \text{υπάρχουν δίκτυα } x_i\to x \text{ στον } X \text{ και } g_i\to\infty \text{ στην } G \text{ ώστε } g_ix_i\to y\}$$

*είναι κενά για κάθε $x\in X$, όπου $g_i\to\infty$ εδώ σημαίνει ότι το δίκτυο δεν έχει σημεία συσσώρευσης στην $G$.*

**Παρατήρηση** Σε περίπτωση που η (τοπολογική) ομάδα $G$ είναι τοπικά συμπαγής, μια συνεχής δράση $(G,X)$ είναι γνήσια αν και μόνο αν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχουν περιοχές τους $U_x, U_y$, αντίστοιχα, τέτοιες, ώστε το σύνολο $\{g \in G \mid (gU_x) \cap U_y \neq \emptyset\}$ να έχει συμπαγή θήκη στη $G$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες καλύψεις του υποκείμενου χώρου με κλειστά-ανοιχτά υποσύνολα του αποδεικνύουμε το επόμενο.

**Θεώρημα** *Έστω* $(X, d)$ *ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος. Αν με* $I(X, d)$ *συμβολίσουμε την ομάδα των ισομετριών του με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης και με* $\Sigma(X)$ *τον χώρο των συνεκτικών συνιστωσών του* $X$ *με την τοπολογία πηλίκο, τότε*

*(i) Αν ο* $\Sigma(X)$ *δεν είναι συμπαγής, τότε η* $I(X, d)$ *δεν είναι απαραίτητα τοπικά συμπαγής ούτε απαραίτητα δρα γνησίως επί του* $X$.

*(ii) Αν ο* $\Sigma(X)$ *είναι συμπαγής (αλλά όχι απαραίτητα χώρος του Hausdorff) τότε*

*(1) η ομάδα* $I(X, d)$ *είναι τοπικά συμπαγής,*
*(2) η δράση* $(I(X, d), X)$ *δεν είναι απαραίτητα γνήσια, και*
*(3) η δράση* $(I(X, d), X)$ *είναι γνήσια αν ο* $X$ *είναι συνεκτικός.*

**Παρατήρηση** Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο $X$ είναι ένας τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος με συμπαγή χώρο ημισυνεκτικών συνιστωσών (quasiconnected components) ως προς την τοπολογία πηλίκο, τότε η ομάδα των ισομετριών $I(X, d)$ είναι τοπικά συμπαγής για κάθε μετρική $d$ που επάγει την τοπολογία του $X$ (θυμίζουμε ότι η ημισυνεκτική συνιστώσα ενός σημείου $x \in X$ είναι η τομή όλων των ανοιχτών-κλειστών του $X$ που περιέχουν το $x$). Η επιλογή μας να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μας υπό τη συνθήκη «ο *χώρος των συνεκτικών συνιστωσών του* $X$ *είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία πηλίκο*» και όχι χρησιμοποιώντας την *γενικότερη συνθήκη* (όπως δείχνουμε με ένα παράδειγμα) «ο *χώρος των ημισυνεκτικών συνιστωσών του* $X$ *είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία πηλίκο*» έγινε γιατί θεωρούμε ότι αυτή η συνθήκη είναι τοπολογικά φυσιολογικότερη.

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) S. Gao and A. S. Kechris, *On the classification of Polish metric spaces up to isometry,* Memoirs of the A.M.S. 766 (2003). Η εργασία αναφέρεται με το όνομα "The role of connectedness in the structure and the action of groups of isometries of locally compact metric spaces" που είχε στην προδημοσίευση.

(2) J. D. Clemmens, S. Gao and A. S. Kechris, *Polish Metric Spaces: Their classification and isometry groups,* Bull. Symbolic Logic **7** (2001), 361-375.

(3) M. Patrão, *Homotheties and isometries of metric spaces,* Matemática Contemporânea **29** (2005) Brazilian Mathematical Society, 79-97.

(4) M. Malicki and S. Solecki, *Isometry groups of separable metric spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 67-81.

(5) S. Gao, *Invariant descriptive set theory*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

(6) T.O. Banakh and D. Repovš, *Detecting Hilbert manifolds among isometri cally homogeneous metric spaces*, Topology Appl. **157** (2010), 1202-1210.

**Βιβλιογραφία**

[1] Dantzig D. van and Waerden B. L. van der, *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), 367-376.
[2] Kobayashi S. and Nomizu K., Foundations of Differential Geometry Vol. I, Interscience, New York, 1963.
[3] Μανούσος Α., *Συμβολή στη μελέτη των D-ευσταθών δράσεων*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1993.
[4] Manoussos A., *The Ellis semigroup of the full group of isometries of a locally compact metric space*, Preprint 98-085, SFB 343 "Diskrete Strukturen in der Mathematik", Universität Bielefeld, 1998.
[5] Sierpinsky W., *Sur les espaces métriques localement séparables,* Fund. Math. **21** (1933), 107-113.
[6] Strantzalos P., *Actions by isometries,* Lecture Notes in Math. **1375** (1989), 319-325.

**[17] The Jacobson radical for analytic crossed products, Journal of Functional Analysis 187(2001) 129-145, από κοινού με τους A. P. Donsig και A. Κατάβολο.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία χαρακτηρίζουμε *πλήρως* το ριζικό Jacobson ενός αναλυτικού σταυρωτού γινομένου (analytic crossed product) $C_0(X)\times_\phi \mathbb{Z}_+^d$ ενός πολυμεταβλητού δυναμικού συστήματος, απαντώντας σε ένα *παλαιό ερώτημα* των Arveson και Josephson [1], χρησιμοποιώντας όρους από το δυναμικό σύστημα (συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το σύνολο των «επανερχόμενων» (recurrent) σημείων του δυναμικού συστήματος). Αναλυτικότερα αποδεικνύουμε ότι το ριζικό Jacobson ενός αναλυτικού σταυρωτού γινομένου ενός δυναμικού συστήματος μιας μεταβλητής αποτελείται από τα στοιχεία των οποίων οι «συντελεστές Fourier» μηδενίζονται στο σύνολο των «επανερχόμενων» σημείων του δυναμικού συστήματος (ενώ ο μηδενικός συντελεστής είναι μηδέν). Για την πολυμεταβλητή περίπτωση απαιτείται μια παραλλαγή της έννοιας των recurrent σημείων, παίρνοντας υπόψιν τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Έστω $(X,\phi)$ ένα (τοπολογικό) δυναμικό σύστημα, δηλαδή ένας τοπικά συμπαγής χώρος $X$ εφοδιασμένος με μια συνεχή, επί και γνήσια (proper) απεικόνιση $\phi$ (: η απεικόνιση είναι συνεχής, κλειστή και η αντίστροφη εικόνα κάθε μονοσυνόλου είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $X$ ). *Το αναλυτικό σταυρωτό γινόμενο (analytic crossed product ή semicrossed product) $C_0(X)\times_\phi \mathbb{Z}_+$ είναι μια (μη αυτοσυζυγής) άλγεβρα τελεστών που αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες του δυναμικού συστήματος, με την έννοια ότι δύο τέτοια συστήματα είναι τοπολογικά συζυγή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες άλγεβρες είναι (αλγεβρικά) ισόμορφες* (πρβλ. [1], [4] και [7]).

Το αναλυτικό σταυρωτό γινόμενο κατασκευάζεται ως εξής. Αρχικά θεωρούμε τα στοιχεία $(f_n)_{n\geq 0}$ του χώρου Banach $l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$, όπου $C_0(X)$ είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων του $X$ που μηδενίζονται στο άπειρο, ως τυπικές (formal) σειρές της μορφής $A=\sum_{n\geq 0}U^n f_n$ με νόρμα $\|A\|=\sum \|f_n\|_{C_0(X)}$. Ο πολλαπλασιασμός στον $l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$ ορίζεται θέτοντας

$$U^n f\cdot U^m g := U^{n+m}(f\circ\phi^m)g$$

και επεκτείνοντας γραμμικά και συνεχώς. Με αυτόν τον πολλαπλασιασμό ο $l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$ είναι μια άλγεβρα Banach. Στην συνέχεια αναπαριστούμε την $l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$, με μια πιστή (faithful) αναπαράσταση, ως μια (concrete) άλγεβρα φραγμένων τελεστών $B(H)$ ενός χώρου Hilbert $H$. Το αναλυτικό σταυρωτό γινόμενο $C_0(X)\times_\phi \mathbb{Z}_+$ είναι η πλήρωση της άλγεβρας $l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$ στον $B(H)$. Ας σημειωθεί ότι στην βιβλιογραφία υπάρχουν παραλλαγές αυτού του ορισμού αλλά τα αποτελέσματα της παρούσης εργασίας είναι συμβατά με αυτές.

Έστω $A=\sum_{n\geq 0}U^n f_n \in l^1(\mathbb{Z}_+,C_0(X))$. Ονομάζουμε $E_n(A):=f_n$ τον n-στο συντελεστή Fourier του $A$. Οι συναρτήσεις $E_n: l^1(Z_+,C_0(X))\to C_0(X)$ είναι συστολές ως προς την νόρμα που επάγεται από τον $B(H)$ και επομένως επεκτείνεται σε μια συστολή επί του $C_0(X)\times_\phi \mathbb{Z}_+$.

Ανάλογο ορισμό για το αναλυτικό σταυρωτό γινόμενο μπορούμε να δώσουμε στην περίπτωση ενός πολυμεταβλητού δυναμικού συστήματος $(X,\phi_n)$ επί ενός τοπικά συμπαγούς $X$, όπου $\{\phi_n : n\in\mathbb{Z}_+^d\}$ είναι μια ημιομάδα συνεχών και γνήσιων επιμορφισμών, ισομορφική με την $\mathbb{Z}_+^d$.

**Ορισμός** *Ένα ιδεώδες $\mathfrak{I}$ μιας άλγεβρας $A$ λέγεται primitive αν είναι ο πυρήνας μιας (αλγεβρικής) irreducible αναπαράστασης. Η τομή όλων των primitive ιδεωδών ονομάζεται το ριζικό Jacobson της άλγεβρας $A$ και συμβολίζεται με $Rad(A)$.*

*Ένα ιδεώδες $\mathfrak{I}$ μιας άλγεβρας $A$ λέγεται πρώτο (prime) αν δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο δύο διακεκριμένων ιδεωδών, δηλαδή αν $\mathfrak{I}_1,\mathfrak{I}_2$ είναι δύο ιδεώδη της $A$ τέτοια ώστε $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2\subseteq\mathfrak{I}$ τότε είτε $\mathfrak{I}_1\subseteq\mathfrak{I}$ ή $\mathfrak{I}_2\subseteq\mathfrak{I}$. . Η τομή όλων των πρώτων ιδεωδών ονομάζεται το πρώτο (prime) ριζικό της άλγεβρας $A$ και συμβολίζε-*

*ται με $PRad(A)$. Μια άλγεβρα $A$ λέγεται ημιαπλή (semisimple) αν το ριζικό Jacobson $Rad(A)=\{0\}$ και ημιπρώτη (semiprime) αν το πρώτο ριζικό $PRad(A)=\{0\}$ ή ισοδύναμα η $A$ δεν περιέχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα (nilpotent) ιδεώδη.*

Στην εργασία αυτή *χαρακτηρίζουμε πλήρως* το ριζικό Jacobson ενός αναλυτικού σταυρωτού γινομένου, απαντώντας σε μια *παλαιά ερώτηση* των Arveson και Josephson το 1969 [1]. Η ερώτηση αυτή είχε απασχολήσει αρκετούς ερευνητές, όπως τους Muhly [3], Peters [5], [6] και Muhly, Mastrangelo, Solel [2]. Μάλιστα τα αποτελέσματά μας αναφέρονται σε ένα πολυμεταβλητό μη αντιστρεπτό δυναμικό σύστημα $(X,\phi_n)$ όπου $\{\phi_n : n\in\mathbb{Z}_+^d\}$ είναι μια ημιομάδα συνεχών και γνήσιων επιμορφισμών, ισομορφική με την $\mathbb{Z}_+^d$ (*τα αποτελέσματα είναι νέα και στην περίπτωση* $d=1$). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

**Θεώρημα** *Έστω $(X,\phi)$ ένα (τοπολογικό) δυναμικό σύστημα, όπου $X$ είναι ένας μετρικοποιήσιμος τοπικά συμπαγής χώρος και $\phi$ μια συνεχή, επί και γνήσια απεικόνιση του $X$. Το ριζικό Jacobson αποτελείται από τα στοιχεία των οποίων οι «συντελεστές Fourier» μηδενίζονται στο σύνολο των «επανερχόμενων» (recurrent) σημείων του δυναμικού συστήματος (ενώ ο μηδενικός συντελεστής είναι μηδέν).*

Στην (κλασική) περίπτωση $d=1$, ένα $x\in X$ *επανέρχεται* αν υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)$ ώστε $\lim_k \phi^{n_k}(x)=x$. Στην πολυμεταβλητή περίπτωση η έννοια αυτή δεν αρκεί για την περιγραφή του ριζικού, όπως δείχνουμε με διάφορα παραδείγματα. Εισάγουμε λοιπόν μια νέα έννοια επαναφοράς, που λαμβάνει υπόψιν τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας: ένα $x\in X$ μπορεί να επανέρχεται όσον αφορά στην δράση π.χ. της πρώτης μεταβλητής, ή των πρώτων δύο μεταβλητών, χωρίς να ενδιαφέρει η συμπεριφορά του ως προς τις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα

**Ορισμός** *Έστω $(X,\mathbb{Z}_+^d)$ ένα πολυμεταβλητό δυναμικό σύστημα και έστω $J\subseteq\{1,2,...,d\}$. Ένα σημείο $x\in X$ θα λέγεται $J$-επανερχόμενο ($J$-recurrent) αν υπάρχει μια ακολουθία $(n_k)$ η οποία είναι γνήσια αύξουσα στην κατεύθυνση του $J$ (δηλαδή η $j$-συντεταγμένη του $n_{k+1}$ είναι μεγαλύτερη της $j$-συντεταγμένης του $n_k$ για κάθε $j\in J$).*

**Θεώρημα** *Έστω $(X,\mathbb{Z}_+^d)$ ένα πολυμεταβλητό δυναμικό σύστημα, όπου $X$ είναι ένας μετρικοποιήσιμος τοπικά συμπαγής χώρος. Το ριζικό Jacobson είναι το κλειστό ιδεώδες που παράγεται από όλα τα μονώνυμα $U^n f$, $n\neq 0$, όπου η $f$ μηδενίζεται στο σύνολο των $J$-επανερχόμενων σημείων που αντιστοιχούν στο support $J$ του $n\in\mathbb{Z}_+^d$.*

Επιπλέον, αποδεικνύουμε τις ακόλουθες προτάσεις.

**Πρόταση** *Το πρώτο (prime) ριζικό ταυτίζεται με το ριζικό Jacobson μόνο όταν είναι κλειστό, πράγμα που δε συμβαίνει πάντα, όπως δείχνουμε με ένα παράδειγμα.*

**Πρόταση** *Στην περίπτωση ενός μετρικοποιήσιμου τοπικά συμπαγούς χώρου το αναλυτικό σταυρωτό γινόμενο* $C_0(X)\times_\phi \mathbb{Z}_+^d$ *είναι ημιαπλό (semisimple) αν και μόνο αν είναι ημιπρώτο (semiprime).*

**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) E. G. Katsoulis, *Geometry of the unit ball and representation theory of operator algebras*, Pacific J. Math. 216 (2004), 267-292.

(2) A. R. Naghipour and A. H. Yamini, *A generalization of the Jacobson radical*, Bull. Korean Math. Soc. **41** (2004), 599-608.

(3) K. R. Davidson and E. G. Katsoulis, *Isomorphisms between topological conjugacy algebras*, J. Reine Angew. Math. (Crelle) **621** (2008), 29-51.

(4) K. R. Davidson and E. G. Katsoulis, *Nonself-adjoint operator algebras for dynamical systems*, Operator structures and dynamical systems, 39-51, Contemp. Math., **503**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

(5) K. R. Davidson and E. G. Katsoulis, *Operator Algebras for multivariant dynamics*, Memoirs of the AMS **209** (2011), no. 982.

(6) B.L. Duncan and J. R. Peters, *Operator Algebras and represantations from commuting semigroup actions*, arXiv:1008.2244.

(7) A. Khemphet and J. R. Peters, *Semicrossed products of the disk algebra and the Jacobson radical*, arXiv:1205.6019.

(8) J. R. Peters, *The C*-envelope of a semicrossed product and nest represantations* (2008), arXiv:0810.5364.

(9) (8) E. T. A. Kakariadis, *Semicrossed Products of C*-algebras and their C*-envelopes* (2011), arXiv:1102.2252.

(10) X. Guoa, *Singly-generated norm closed bimodules of nest algebras*, Mathematical and Computer Modelling , doi:10.1016/ j.mcm.2011.07.035.

**Βιβλιογραφία**


[1] Arveson W. B. and Josephson K. B., *Operator algebras and measure preserving transformations II*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 100-134.

[2] Mastrangelo L., Muhly P. S. and Solel B., *Locating the radical of α triangular operator algebra*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **115** (1994), 27-38.

[3] Muhly P. S., *Radicals, crossed products, and flows*, Ann. Polon. Math. **43** (1983), 35-42.

[4] Hadwin D. W. and Hoover T. B., *Operator algebras and the conjugacy of transformations*, J. Func. Anal. **77** (1988), 112-122.

[5] Peters J. R., *Semi-crossed products of $C^*$-algebras*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 498-534.
[6] Peters J. R., *The ideal structure of certain nonseladjoint operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 333-352.
[7] Power S. C., *Classification of analytic crossed product algebras*, Bull. London Math. Soc. **24** (1992), 368-372.

**[18] Minimal flows on multipunctured surfaces of infinite type, Bulletin London Mathematical Society 27 (1995) 595-598, από κοινού με τον Κ. Αθανασόπουλο.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία κάνουμε μια *πλήρη μελέτη* των ελάχιστων (minimal) δυναμικών συστημάτων (: συνεχών δράσεων του $\mathbb{R}$) σε 2-πολλαπλότητες του τύπου $M \setminus F$, όπου η $M$ είναι μια συμπαγής 2-πολλαπλότητα και $F \subset M$ ένα μη κενό, ολικά μη συνεκτικό, κλειστό σύνολο.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Έστω μια 2-πολλαπλότητα του τύπου $M \setminus F$, όπου η $M$ είναι μια συμπαγής 2-πολλαπλότητα και $F \subset M$ ένα μη κενό, ολικά μη συνεκτικό, κλειστό σύνολο που λέγεται *σύνολο των περάτων της* $M \setminus F$.

**Ορισμός** *Ένα δυναμικό σύστημα* $(\mathbb{R}, X)$ *(: μια συνεχής δράση του* $\mathbb{R}$ *) επί ενός τοπολογικού χώρου* $X$ *λέγεται ελάχιστο αν κάθε σημείο του* $X$ *έχει πυκνή τροχιά στον* $X$.

Παραδείγματα τέτοιων δυναμικών συστημάτων με πεπερασμένο σύνολο περάτων ήταν γνωστά από παλιά. Στο *βασικό αποτέλεσμα της εργασίας αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοιο δυναμικό σύστημα με άπειρο σύνολο περάτων μπορεί να κατασκευαστεί από ένα με πεπερασμένο* με τον τρόπο που περιγράφει το ακόλουθο.

**Θεώρημα** *Έστω* $M \setminus F$ *μια 2-πολλαπλότητα με άπειρο σύνολο περάτων* $F$ *που φέρει ένα ελάχιστο δυναμικό σύστημα. Τότε υπάρχουν ένα πεπερασμένο σύνολο* $K \subset F$, *ένα* $C^\infty$ *διανυσματικό πεδίο* $\xi$ *στο* $M \setminus K$ *με ελάχιστη ροή και μια* $C^\infty$ *συνάρτηση* $f : M \setminus K \to [0,1]$ *με* $f^{-1}(0) = F \setminus K$ *ώστε το επεκταμένο δυναμικό σύστημα στην* $M$ *είναι τοπολογικά ισοδύναμο με την επέκταση της ροής του* $f\xi$ *στην* $M$, *άρα και στο* $M \setminus F$.

**Ορισμός** *Έστω* $(\mathbb{R}, X)$ *ένα δυναμικό σύστημα και* $x \in X$. *Το θετικό οριακό σύνολο του* $x$ *είναι το σύνολο*

$$L^+(x) = \{y \in X : \text{υπάρχει μια ακολουθία } t_n \to +\infty \text{ τέτοια ώστε } t_n x \to y\}.$$

*Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το αρνητικό οριακό σύνολο του* $x \in X$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα απαραίτητο εργαλείο για να λύσουμε πλήρως το γενικό πρόβλημα της κατασκευής και της μελέτης των ελάχιστων (minimal) δυναμικών συστημάτων σε 2-πολλαπλότητες του τύπου $M \setminus F$ .

**Πρόταση** *Κάθε ελάχιστο δυναμικό σύστημα σε μια διδιάστατη διάτρητη σπείρα (torus) $T^2 \setminus F$ είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τον περιορισμό στο $T^2 \setminus F$ της ροής του γινομένου μιας $C^\infty$ συνάρτησης $f : T^2 \to [0,1]$ με $f^{-1}(0) = F$ μ' ένα άρρητο διανυσματικό πεδίο.*

Στη συνέχεια, και εφόσον ανάγαμε την περίπτωση που η πολλαπλότητα $M \setminus F$ έχει άπειρο το πλήθος πέρατα σε αυτήν που η $M \setminus F$ έχει πεπερασμένο πλήθος περάτων, δείχνουμε ότι αν η πολλαπλότητα $M \setminus F$ έχει πεπερασμένο πλήθος από πέρατα, τότε κάθε πέρας (δηλαδή κάθε σημείο του $F$ ) είναι ένα πιθανώς εκφυλισμένο (degenerate) σάγμα (saddle point). Επομένως, από το θεώρημα δείκτη των Poincaré-Hopf, ο αριθμός των τροχιών της $M \setminus F$ που έχουν κενό θετικό (αρνητικό) οριακό σύνολο στην $M \setminus F$ ισούται με $|F| - \chi(M)$, όπου $|F|$ είναι ο (πεπερασμένος) πληθάριθμος του $F$ και $\chi(M)$ είναι η χαρακτηριστική Euler της $M$ . Έτσι αν $F$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο της διδιάστατης σπείρας (torus) $T^2$, τότε κάθε ελάχιστο δυναμικό σύστημα επί της $T^2 \setminus F$ κατασκευάζεται (modulo τοπολογική ισοδυναμία) από ένα άρρητο διανυσματικό πεδίο πολλαπλασιάζοντας το με μία λεία συνάρτηση που μηδενίζεται ακριβώς επί του συνόλου $F$ . Χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα από την [4] (και χρησιμοποιώντας κατάλληλες συγκολλήσεις), αν η χαρακτηριστική Euler $\chi(M) < 0$, δεν είναι δύσκολο να δειχτεί ότι *μπορούν να υπάρξουν όλες οι πιθανές περιπτώσεις συμπεριφοράς στο άπειρο* (δηλαδή γύρω από τα σημεία του $F$ ) ενός ελάχιστου δυναμικού συστήματος επί της $M \setminus F$ .

**Βιβλιογραφία**


[1] Abels H., *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 457-473.

[2] Bhatia N. P. and Szegö G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, Berlin, 1970.

[3] Conley C. and Easton R., *Isolated invariant sets and isolating blocks,* Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 35-61.

[4] Gardiner C. J., *The structure of flows exhibiting nontrivial recurrence on two dimensional manifolds*, J. Differential Equations **57** (1985), 138-158.

[5] Gutierrez C., *Smoothing continuous flows on two manifolds and recurrences*, Ergodic Th. and Dynamical Systems **6** (1986), 17-44.

[6] Richards I., *On the classification of noncompact surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 259-269.

[7] Sacker R. J. and Sell G. R., *On the existence of periodic solutions on 2-manifolds,* J. Differential Equations **11** (1972), 449-463.

[8] Whitney H., *Regular families of curves,* Ann. of Math. **34** (1933), 244-270.


**Αναφορές από άλλους ερευνητές**

(1) K. Athanassopoulos, T. Petrescou and P. Strantzalos, *A class of flows on 2-manifolds with simple recurrence*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 618-635.

**[19] Coarse topological transitivity on open cones and coarsely J-class and D-class operators, arXiv:1306.5331.**

*ΠΕΡΙΛΗΨΗ*: Στην υπό ανάλυση εργασία γενικεύουμε την έννοια της coarse hypercyclicity, που πρώτος εισήγαγε ο N.S. Feldman στην [14], σε αυτήν της coarse topological transitivity επί ανοιχτών κώνων. Αποδεικνύουμε ότι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που δρα επί ενός χώρου Banach άπειρης διάστασης με μια coarsely dense τροχιά επί ενός ανοιχτού κώνου είναι υπερκυκλικός και ένας coarsely topologically transitive (mixing) τελεστής επί ενός ανοιχτού κώνου είναι topologically transitive (mixing αντιστοίχως). Επίσης, «τοπικοποιούμε» αυτές της έννοιες εισάγοντας και μελετώντας δύο νέες κλάσεις τελεστών, τους coarsely J-class και coarsely D-class τελεστές. Αποδεικνύουμε ότι κάθε backward unilateral weighted shift στον $l^2(\mathbb{N})$ που είναι coarsely J-class (ή coarsely D-class) επί ενός ανοιχτού κώνου είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής. Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα ενός bilateral backward shift στον $l^2(\mathbb{Z})$ που είναι coarsely J-class, επομένως είναι και D-class, που δεν είναι J-class τελεστής. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας (μη διαχωρίσιμος) χώρος Banach που δεν δέχεται coarsely D-class τελεστές επί ανοιχτών κώνων.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ*

Ο N.S. Feldman στην [14] εισήγαγε την έννοια της coarse hypercyclicity με το όνομα *"d-sensity"*. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T: X \to X$ που δρα επί ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach λέγεται της coarsely hypercyclic αν έχει μια τροχιά που βρίσκεται εντός μιας σταθεράς φραγμένης απόστασης *d* από κάθε σημείο του χώρου $X$ (το όνομα *"d-sensity"* στην [14] προέρχεται από τη σταθερά *d*). Ο Feldman απέδειξε ότι μια τέτοια τροχιά δεν είναι απαραίτητα πυκνή στον $X$ αλλά ο τελεστής $T$ είναι απαρίτητα υπερκυκλικός. Οι coarsely dense τροχιές εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο αν κοιτάξει κανείς τις διαταράξεις μιας πυκνής τροχιάς από ένα διάνυσμα με φραγμένη τροχιά [14]. Στην [1] μελετήσαμε, μαζί με τον H. Abels ένα παρόμοιο πρόβλημα για πεπερασμένως παραγόμενες υποημιομάδες της $GL(V)$, όπου $V$ είναι ένας μιγαδικός ή πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αποδείξαμε ότι κάθε coarsely dense τροχιά επί ενός ανοιχτού κώνου είναι στην πραγματικότητα πυκνή στον $X$ στην περίπτωση που ο $X$ είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Θυμίζουμε ότι ένας *ανοιχτός κώνος* σε ένα χώρο Banach $X$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο $C$ του $X$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in C$ για κάθε $\lambda > 0$.

Βασιζόμενοι στα προαναφερθέντα αποτελέσματα και έννοιες, εισάγουμε και μελετάμε την έννοια της coarse topological transitivity σε ανοιχτούς κώνους. Αυτή η έννοια μπορεί να ειδωθεί σαν μια γενίκευση της coarse hypercyclicity του Feldman στην [14]. Ένα πλεονέκτημα που έχει η coarse topologically transitivity συγκριτικά με την coarse hypercyclicity είναι ότι μπορεί να υπάρξει και σε μη διαχωρίσιμους χώρους Banach όπως και η topologically transitivity. Θυμίζουμε ότι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ που δρα επί ενός χώρου Banach λέγεται *topological transitive* αν για κάθε δύο μη κενά ανοιχτά υποσύνολα $U, V$ του $X$ υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε $T^n U \cap V \neq \emptyset$.

**Ορισμός** Έστω $X$ ένας χώρος Banach άπειρης διάστασης. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ λέγεται *coarsely topologically transitive* επί ενός ανοιχτού κώνου $C \subset X$ ως προς μία θετική σταθερά $d$ αν για κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο $U \subset X$ και για κάθε $x \in C$ υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε $T^n U \cap B(x,d) \neq \emptyset$, όπου με $B(x,d)$ συμβολίζουμε την ανοιχτή μπάλα κέντρου $x \in X$ και ακτίνας $d$. Αν $C = X$ ο τελεστής $T$ λέγεται coarsely topologically transitive.

Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ που δρα επί ενός χώρου Banach λέγεται *topological mixing* αν για κάθε δύο μη κενά ανοιχτά υποσύνολα $U, V$ του $X$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N$ έτσι ώστε $T^n U \cap V \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$.

**Ορισμός** Έστω $X$ ένας χώρος Banach άπειρης διάστασης. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ λέγεται *coarsely topologically mixing* επί ενός ανοιχτού κώνου $C \subset X$ ως προς μία θετική σταθερά $d$ αν για κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο $U \subset X$ και για κάθε $x \in C$ υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $N$ έτσι ώστε $T^n U \cap B(x,d) \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$. Αν $C = X$ ο τελεστής $T$ λέγεται coarsely topologically mixing.

Το βασικό αποτέλεσμα της υπό ανάλυση εργασίας είναι το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα** Έστω $T : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που δρα επί ενός χώρου Banach άπειρης διάστασης. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν ο $T$ έχει μία coarsely dense τροχιά επί ενός ανοιχτού κώνου τότε ο $T$ είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής.
(ii) Αν ο $T$ είναι coarsely topologically transitive επί ενός ανοιχτού κώνου τότε ο $T$ είναι topologically transitive.
(iii) Αν ο $T$ είναι coarsely topologically mixing επί ενός ανοιχτού κώνου τότε ο $T$ είναι topologically mixing.

Στην [12], μαζί με τον Γ. Κωστάκη, «τοπικοποιήσαμε» την έννοια της topological transitivity εισάγωντας την έννοια του J-class τελεστή. Κατά παρόμοιο τρόπο «τοπικοποιούμε» αυτές της έννοιες εισάγοντας και μελετώντας δύο νέες κλάσεις τελεστών, τους coarsely J-class και coarsely D-class τελεστές.

**Ορισμός** Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ που δρα επί ενός χώρου Banach λέγεται *coarsely J-class* επί ενός ανοιχτού κώνου $C \subset X$ ως προς μία θετική σταθερά $d$ αν

$$C \subset \{y \in X : \text{υπάρχει μια γνήσια αύξουσα ακολουθία από θετικούς ακέραιους } \{k_n\} \text{ και μια ακολουθία } \{x_n\} \subset X, \text{ έτσι ώστε } x_n \to x \text{ και } \|T^{k_n} x_n - y\| < d \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

**Ορισμός** Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ που δρα επί ενός χώρου Banach λέγεται *coarsely D-class* επί ενός ανοιχτού κώνου $C \subset X$ ως προς μία θετική σταθερά $d$ αν

$$C \subset \{y \in X : \text{υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία από μη αρνητικούς ακέραιους } \{k_n\} \text{ και μια ακολουθία } \{x_n\} \subset X, \text{ έτσι ώστε } x_n \to x \text{ και } \|T^{k_n} x_n - y\| < d \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι κάθε backward unilateral weighted shift στον $l^2(\mathbb{N})$ που είναι coarsely J-class (ή coarsely D-class) επί ενός ανοιχτού κώνου είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής και δίνουμε ένα παράδειγμα ενός bilateral backward shift στον $l^2(\mathbb{Z})$ που είναι coarsely J-class, επομένως είναι και D-class, που δεν είναι J-class τελεστής. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας (μη διαχωρίσιμος) χώρος Banach που δεν δέχεται coarsely D-class τελεστές επί ανοιχτών κώνων.

**Βιβλιογραφία**


[1] H. Abels and A. Manoussos, *Linear semigroups with coarsely dense orbits*, preprint, arXiv:1108.2221.

[2] Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis, *An invitation to operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, 50, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[3] S.I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384-390.

[4] S.A. Argyros, A.D. Arvanitakis and A.G. Tolias, *Saturated extensions, the attractors method and hereditarily James tree spaces*, Methods in Banach space theory, 1-90, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 337, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[5] S.A. Argyros and R.G. Haydon, *A hereditarily indecomposable* $L_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, Acta Math. **206** (2011), 1-54.

[6] M.R. Azimi and V. Müller, *A note on J-sets of linear operators*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **105** (2011), 449-453.

[7] F. Bayart and É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge Tracts in Math. 179, Cambridge Univ. Press 2009.

[8] A. Bahman Nasseri, *On the existence of J-class operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., published electronically (2012).

[9] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003-1010.

[10] P.S. Bourdon and N.S. Feldman, *Somewhere dense orbits are everywhere dense*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 811-819.

[11] G. Costakis and A. Manoussos, *J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers*, Integral Equations Operator Theory **62** (2008), 149-158.

[12] G. Costakis and A. Manoussos, J-class operators and hypercyclicity, J. Operator Theory **67** (2012), 101-119.

[13] G. Costakis and A. Manoussos, *Limit and extended limit sets of matrices in Jordan normal form*, preprint, arXiv:1006.1054.

[14] N.S. Feldman, *Perturbations of hypercyclic vectors*, J. Math. Anal. Appl. **273** (2002), 67-74.

[15] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris, *Linear chaos*, Springer Universitext, 2011.

[16] A. Manoussos, *A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to Linear Dynamics*, J. Operator Theory **70** (2013), 165-174.