

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Numerische Analyse balancierter Milstein Verfahren für stochastische Differentialgleichungen

Elena Isaak

Masterarbeit

Matrikelnummer: 2196843

Betreuer: Prof. Dr. W.-J. Beyn,

Dr. Math. Raphael Kruse

Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Numerische Konzepte für stochastische Differentialgleichungen	5
1.2	Motivation balancierter Verfahren	6
1.3	Zu den Inhalten dieser Arbeit	9
2	Einführung	13
2.1	Allgemeine Form eines k -Schrittverfahrens	13
3	Numerische Verfahren für SODE	19
3.1	Das Itô-Taylor-Verfahren	19
3.2	Konsistenz des Itô-Taylor-Verfahrens	21
3.3	Balanced-Milstein-Verfahren und dessen Konsistenz	25
4	Charakterisierung der Bistabilität	39
4.1	Bistabilität eines Einschrittverfahrens	39
4.2	Bistabilität des Itô-Taylor-Verfahrens	44
4.3	Bistabilität des Balanced-Milstein-Verfahrens	45
5	Numerische Tests	49
5.1	Das Verhalten der numerischen Verfahren zur exakten Lösung	49
5.2	Der starke Konvergenzfehler	51
5.3	Zusammenfassung	53
6	Appendix	55
6.1	Hilfsmittel aus der stochastischen Analysis	55

1 Einleitung

1.1 Numerische Konzepte für stochastische Differentialgleichungen

Die Analyse numerischer Verfahren für stochastische Differentialgleichungen erfordert, die Begriffe Konsistenz, Stabilität und Konvergenz mathematisch präziser zu formulieren und auf konkrete Beispiele anzuwenden. Bekannte Ergebnisse zur starken und schwachen Konvergenz für Verfahren höherer Ordnung findet man in dem Buch von Kloeden und Platen (siehe [10]). Als Erweiterung des Stabilitätsbegriffes hat R. Kruse in seiner Arbeit [12] die Bistabilität eingeführt und für Mehrschrittverfahren, insbesondere für die stochastische Theta-Methode, das Itô-Taylor-Verfahren und die BDF2-Maruyama-Methode bewiesen. Dabei hat er für die lokale Fehlerabschätzung die stochastische Version der Spijkernorm verwendet, die eine schärfere Abschätzung ergibt. Diese Resultate bilden die Motivation dafür, weitere Verfahren daraufhin zu untersuchen, ob auf sie die Konvergenz- und Stabilitätstheorie aus [12] anwendbar ist. In vorliegender Arbeit wird dies für die sogenannten balancierten Milstein-Verfahren durchgeführt, die in [9] und [15] vorgeschlagen wurden und die im Folgenden definiert und motiviert werden.

Wir werden eine stochastische gewöhnliche Differentialgleichung, kurz SODE genannt, in der folgenden Form betrachten

$$\begin{aligned}dX(t) &= b^0(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^m b^r(t, X(t))dW^r(t), t \in [0, T], \\ X(0) &= X_0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dabei sind $b^r : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, r = 0, \dots, m$ messbare Drift- und Diffusionskoeffizientenfunktionen, $W^r : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind reelle, unabhängige Standard-Wiener-Prozesse, adaptiert an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , und $(X(t))_{t \in [0, T]}$ ist ein reellwertiger stochastischer Prozess, der eine Lösung der SODE (1.1) darstellt. Der Prozess $X(t)$ wird auch Itô-Prozess genannt.

Im Weiteren werden wir in dieser Arbeit die Itô-Taylor-Entwicklung verwenden, die mehrfache stochastische Integrale besitzt. Um diese Integrale zu beschreiben, benötigen wir

die Notation der Multi-Indizes (siehe [10, Chap.5]). Demnach haben wir für alle $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} I_{(0)}^{s,t} &= (t - s), \\ I_{(r)}^{s,t} &= (W_t^r - W_s^r) \in \mathcal{N}(0, t - s), \\ I_{(r_1, r_2)}^{s,t} &= \int_s^t \int_s^z dW^{r_1}(y) dW^{r_2}(z). \end{aligned}$$

Wir betrachten ein implizites Einschrittverfahren zur Approximation der Lösung $X(t)$, das als balanciertes Milstein-Verfahren (Balanced Milstein Method (BMM)) bekannt ist (vgl. [9]):

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_{i-1} + \sum_{r=0}^m b^r(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r)}^{t_{i-1}, t_i} + \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{r_1} b^{r_2}(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r_1, r_2)}^{t_{i-1}, t_i} \\ &\quad + [d^0(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(0)}^{t_{i-1}, t_i} + \sum_{r=1}^m d^r(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r, r)}^{t_{i-1}, t_i}] (Y_{i-1} - Y_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{1.2}$$

für alle $0 \leq t \leq T$ mit Differentialoperatoren $L^r = \sum_{k=1}^d b^{r,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$. Die Funktionen d^0, d^1, \dots, d^m sind $d \times d$ -matrix-wertige Gewichtsfunktionen. In folgenden Kapiteln werden wir dieses Verfahren im Einzelnen betrachten und bestimmte Voraussetzungen annehmen, um die Konsistenz, Bistabilität und Konvergenz zu beweisen. Dabei werden wir die Bezeichnungen balanciertes Milstein-Verfahren und Balanced-Milstein-Verfahren (BMM) nebeneinander benutzen.

1.2 Motivation balancierter Verfahren

Als Nächstes wollen wir die Motivation der ausbalancierten Methoden aus [15] vorstellen. Es ist bekannt, dass explizite numerische Verfahren für deterministische Differentialgleichungen mit steifen Anfangswertproblemen unbefriedigend sind (siehe [7]). Einerseits wird die Anzahl der numerischen Berechnungen zunehmen, wenn wir sehr kleine Schrittweiten wählen. Andererseits, wenn die Schrittweite nicht hinreichend klein ist, wird der starke Fehler deutlich größer sein. Für solche Differentialgleichungen ergeben implizite numerische Verfahren bessere Resultate.

So wie im deterministischen Fall erwarten wir durch implizite numerische Verfahren auch für stochastische Differentialgleichungen bessere Ergebnisse zu bekommen. Wir nennen ein Verfahren *deterministisch implizit*, falls die Drift-Terme implizit sind, sonst *stochastisch implizit*. Ein Beispiel von einem impliziten Drift-Term in (1.2) ist der Term $d^0(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(0)}^{t_{i-1}, t_i} Y_i$. Die deterministisch impliziten Verfahren (oder Drift-Impliziten-

Verfahren) sind gut für steife Anfangswertprobleme mit kleinem stochastischen Rauschen geeignet (vgl. [10, Chap.12]). Aber in den Fällen, in denen der stochastische Anteil eine wesentliche Rolle spielt, wie zum Beispiel bei multiplikativen Rauschen mit großer Rauschamplitude, muss man auch bei Drift-Impliziten-Verfahren eine kleine Zeitschrittweite wählen. Man erwartet daher, dass in diesen Fällen stochastisch implizite Verfahren einen Vorteil bieten.

Wir betrachten eine Itô-Gleichung mit multiplikativem Rauschen:

$$dX(t) = \sigma X(t)dW(t), \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

und mit dem Anfangswert $\tilde{X}_0 = x_0$. Das einfachste numerische Verfahren zur Approximation der Lösung der Gleichung (1.3) ist das Euler-Maruyama-Verfahren der Form

$$Y_i = Y_{i-1} + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}), \quad (1.4)$$

Dabei ist $\Delta W(t_{i-1}) = W(t_i) - W(t_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$ ein Wiener-Inkrement und $Y_0 = \tilde{X}_0$. Dieses Verfahren ist ein explizites Verfahren. Ein einfaches Gegenstück zum expliziten ist das implizite Euler-Maruyama-Verfahren der Form

$$Y_i = Y_{i-1} + \sigma Y_i \Delta W(t_{i-1})$$

liefert jedoch explodierende Werte, da $Y_i = (1 - \sigma \Delta W(t_{i-1}))^{-1} Y_{i-1}$ und $\mathbb{E}|(1 - \sigma \Delta W(t_{i-1}))^{-1}| = +\infty$. Dennoch kann man implizite numerische Methoden für spezielle Gleichungen erzeugen, wenn man sich den expliziten Verfahren höherer Ordnung zuwendet. In diesem Sinne betrachten wir ein numerisches Verfahren der starken Ordnung 1, das als Milstein-Verfahren bekannt ist (siehe [10, Chap.10]). Es lautet für die spezielle Gleichung (1.3):

$$Y_i = Y_{i-1} + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} ((\Delta W(t_{i-1}))^2 - h), \quad i = 1, \dots, N,$$

mit $Y_0 = \tilde{X}_0$. Hier ist $h = \frac{T}{N}$, $N = 1, 2, \dots$, die Schrittweite. Wir formen den stochastischen Term um

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} ((\Delta W(t_{i-1}))^2 - h) = \frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} (\Delta W(t_{i-1}))^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} h$$

und erzeugen ein partiell implizites Verfahren, indem im letzten Term Y_{i-1} durch Y_i ersetzt wird:

$$Y_i = Y_{i-1} + \left(\sigma \Delta W(t_{i-1}) + \frac{\sigma^2}{2} (\Delta W(t_{i-1}))^2 \right) Y_{i-1} - \frac{\sigma^2}{2} Y_i h, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dann erhalten wir

$$(1 + \frac{\sigma^2}{2}h)Y_i = Y_{i-1} + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + \frac{\sigma^2}{2} Y_{i-1} (\Delta W(t_{i-1}))^2, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.5)$$

und jetzt gilt $\mathbb{E}|(1 + \frac{\sigma^2}{2}h)^{-1}| < \infty$. Dieses Verfahren ist identisch mit dem Verfahren, das in [10, Sec.10.7] angegeben und durch Anwendung auf die Stratonovichschen Gleichung abgeleitet wird. Die numerische Approximation, die durch dieses Verfahren beschrieben ist, konvergiert zur exakten Lösung mit starker Ordnung $\gamma = 1$ (vgl. [15, Th.2]). Wir beachten, dass kein Zufallsterm dieses Verfahrens implizit ist.

Wir interessieren uns für die ganz implizite Verfahren, die stark konvergieren und implizite Zufallsterme erlauben. Einer solchen Methoden wurde in [15] vorgeschlagen und als “balancierte Methode” bezeichnet. Für die Gleichung (1.3) nimmt das einfachste balancierte Verfahren, das auch als BIM genannt wird, die folgende Form an (vgl. [15, Sec.2]):

$$Y_i = Y_{i-1} + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + \sigma(Y_{i-1} - Y_i) |\Delta W(t_{i-1})|, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

mit $Y_0 = \tilde{X}_0$ und $\Delta W(t_{i-1})$ ist wie in (1.4).

Die numerische Positivität eines stochastischen Prozesses wird zum Beispiel in der Finanzmathematik sehr geschätzt. Durch die Einführung zusätzlicher Kontrollterme in die Verfahrensfunktion des Euler-Maruyama-Verfahrens kann der Effekt der Brownschen Bewegung in die falsche Richtung (negative Richtung) ausbalanciert werden (vgl. [8]).

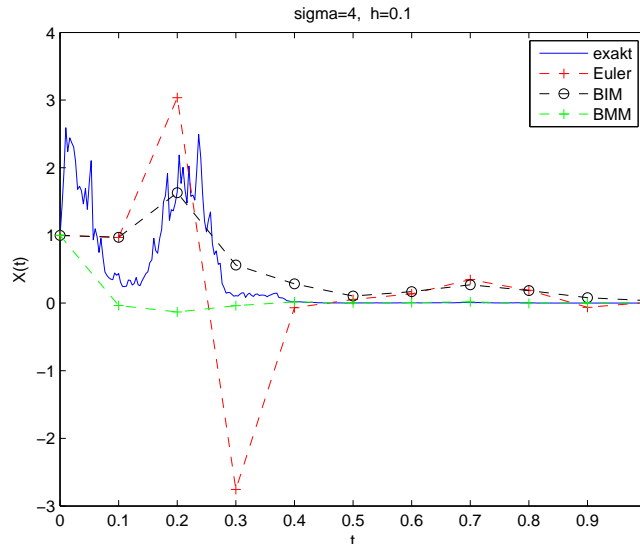


Abbildung 1.1: Exakte Lösung und numerische Resultate für (1.3).

In den Abbildungen 1.1 und 1.2 sieht man das Verhalten des expliziten Euler-Maruyama-Verfahrens (1.4), BIM (1.6) und BMM (1.2) zur exakten Lösung der Gleichung (1.3) mit

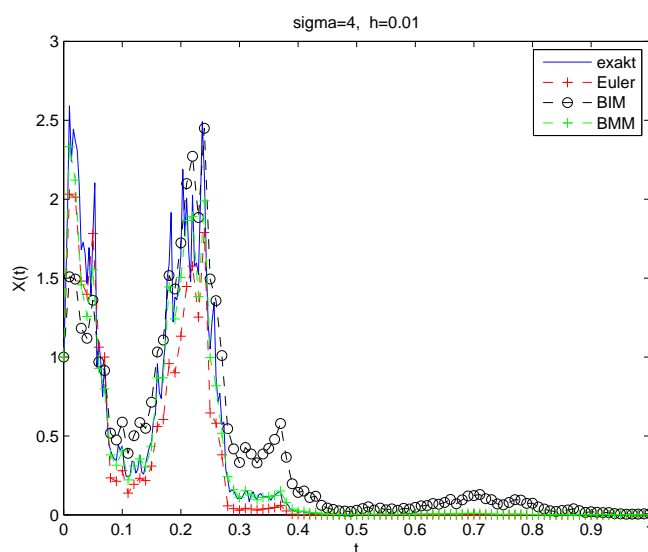


Abbildung 1.2: Exakte Lösung und numerische Resultate für (1.3).

zwei verschiedenen Schrittweiten und dem Parameter $\sigma = 4$. Es ist offensichtlich, dass für große σ das Euler-Maruyama-Verfahren, im Gegensatz zum BIM und BMM, bei der groben Schrittweite $h = 0.1$ große Fehler aufweist.

Einerseits vermeidet das balancierte implizite Verfahren die großen Fehler für große Werte von h . Andererseits für $h \rightarrow 0$ hat dieses Verfahren nur die Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$ (vgl. [15, Th.1]). Unser Ziel in dieser Arbeit ist zu beweisen, dass das balancierte Milstein-Verfahren eine höhere Konvergenzordnung besitzt.

1.3 Zu den Inhalten dieser Arbeit

In dieser Arbeit werden wir, basierend auf den Veröffentlichungen [12] von R. Kruse, [9] von C. Kahl, H. Schurz und [15] von G. Milstein, E. Platen, H. Schurz, das Itô-Taylor-Verfahren und das Balanced-Milstein-Verfahren (BMM) auf Konvergenz untersuchen.

Im Kapitel 2 stellen wir eine allgemeine Form eines k -Schrittverfahrens dar und definieren für Gitterfunktionen mit Werten in $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ die Maximumnorm $\|\cdot\|_{0,h}$ und die stochastische Version $\|\cdot\|_{-1,h}$ der Spijkernorm (siehe [12]). Hier werden die Begriffe Konsistenz, Bistabilität und Konvergenz eingeführt. Zum Schluss beweisen wir einen Äquivalenzsatz, mit dem wir die Konvergenz beweisen.

Kapitel 3 befasst sich mit den numerischen Verfahren für stochastische Differentialgleichungen und deren Konsistenz. Hier werden wir zwei numerische Verfahren betrachten: das Itô-Taylor-Verfahren und das balancierte Milstein-Verfahren. Wir diskutieren die

Lipschitz-Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen, die wir später für den Beweis der Konsistenz und der Bistabilität brauchen (vgl. [12]). Das Balanced-Milstein-Verfahren werden wir in eine explizite Form umschreiben (vgl. [9]). In der lokalen Konsistenzfehlerabschätzung wird die stochastische Spijkernorm angewendet. Durch diese Abschätzung bekommen wir für das Balanced-Milstein-Verfahren die Konsistenzordnung mindestens 1.

Im Kapitel 4 werden wir uns mit der Bistabilität der beiden Verfahren beschäftigen. Wir führen eine Lipschitz-Typ-Bedingung für die Inkrementfunktion ein und zeigen, dass das Itô-Taylor-Verfahren und BMM diese Bedingung erfüllen. Wir beweisen einen Satz mit beidseitigen Fehlerabschätzungen bei der Konvergenz.

Im Kapitel 5 werden wir einige numerische Beispiele für stochastische Differentialgleichungen untersuchen. Hier betrachten wir nichtlineare SODE. Wir werden das Verhalten der numerischen Verfahren für verschiedene große Werte von σ betrachten, und den Konvergenzfehler testen.

Der Appendix enthält einige Aussagen und Sätze aus der stochastischen Analysis, die in dieser Arbeit benutzt werden.

Diese Masterarbeit wurde nach Abgabe redaktionell überarbeitet.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. W.-J. Beyn für die Unterstützung bei dieser Arbeit bedanken. Durch die Gespräche mit ihm habe ich viel Information bekommen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen hat. Er hat mich in dieser Zeit immer wieder aufs Neue ermutigt.

Ich bedanke mich auch bei Dr. Math. R. Kruse für seine gute Betreuung. Trotz seiner Beschäftigung in Zürich hat er sich immer wieder für mich Zeit genommen und ist auf alle meine Fragen eingegangen. Er hat mit guten Ideen meine Masterarbeit betreut.

Ich möchte mich noch bei Dr. Math. J. Rottmann-Matthes, Dipl.-Math. D. Otten und bei Dipl.-Math. S. Dieckmann für die Unterstützung in der Programmierung bedanken.

Großer Dank gilt auch meinem Ehemann Valeri Isaak, der während der letzten sechs Monaten auf viel gemeinsame Zeit verzichten musste und dabei ein großes Interesse an meiner Arbeit zeigte.

2 Einführung

2.1 Allgemeine Form eines k -Schrittverfahrens

Beginnen möchten wir mit der Betrachtung einer stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichung (SODE) der Form

$$\begin{aligned} dX(t) &= b^0(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^m b^r(t, X(t))dW^r(t), \quad t \in [0, T], \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $b^r : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $r = 0, \dots, m$ messbare Drift- und Diffusionskoeffizientenfunktionen sind, $W^r : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind reelle, unabhängige standard Wiener-Prozesse, adaptiert zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und $(X(t))_{t \in [0, T]}$ bezeichnet eine Lösung der SODE (2.1). Insbesondere nehmen wir an, dass die folgende Bedingungen gelten

(A1) $X_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine \mathcal{F}_0 -messbare und \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable, die

$$\mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty \text{ erfüllt.}$$

(A2) Es existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} |b^r(t, x)| &\leq K(1 + |x|), \\ |b^r(t, x) - b^r(t, y)| &\leq K|x - y| \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ und $r = 0, \dots, m$ gilt. Hier bezeichnen wir mit \mathbb{E} den Erwartungswert bezüglich P und mit $|\cdot|$ die Euklidische Norm in \mathbb{R}^d . Aus (A1) und (A2) folgt die eindeutige Existenz der starken Lösung $X(t)$ von (2.1) (vgl. [4, Th. 7.4]), das heißt, es existiert ein eindeutiger, P -f.s.-stetiger und $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -adaptierter Prozess X , der erfüllt

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b^0(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^m \int_0^t b^r(s, X(s))dW^r(s) \tag{2.2}$$

P -f.s. für alle $t \in [0, T]$ und

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X(s)|^2 ds\right) < \infty.$$

Im Folgenden führen wir eine allgemeine Form eines numerischen k -Schrittverfahrens zu (2.1) ein.

Sei $h = \frac{T}{N}$ die Schrittweite des äquidistanten Zeitgitters $\tau_h = \{t_i = ih | i = 0, \dots, N\}$. Uns interessiert ein lineares stochastisches k -Schrittverfahren in folgender Form:

$$Y_i = \tilde{X}_i, i = 0, \dots, k-1,$$

$$\sum_{j=0}^k a_j Y_{i+j-k} = \Phi_h(t_i, Y_{i-k}, \dots, Y_i, (I_\alpha^{t_{i+j-k}})_{\alpha \in \mathcal{A}}, j = 1, \dots, k),$$

wobei $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}, a_k \neq 0$ und die Anfangswerte $\tilde{X}_i, i = 0, \dots, k-1$, \mathcal{F}_{t_i} -messbare, quadrat-integrierbare Zufallsvariablen sind. Die Funktion $\Phi_h : [0, T] \times \mathbb{R}^{(k+1)d} \times \mathbb{R}^{k|\mathcal{A}|} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine Inkrementfunktion und $I_\alpha^{t_i}$ ein l -faches iteriertes stochastisches Integral. Ein einfaches Beispiel für ein k -Schrittverfahren ist das Euler-Maruyama-Verfahren: $k = 1$,

$$Y_0 = X_0,$$

$$Y_i - Y_{i-1} = b^0(t_{i-1}, Y_{i-1})h + \sum_{r=1}^m b^r(t_{i-1}, Y_{i-1})I_{(r)}^{t_i}, i = 1, \dots, N,$$

mit stochastischen Inkrementen $I_{(r)}^{t_i} = W^r(t_i) - W^r(t_{i-1})$. Es ist bekannt, dass dieses Verfahren die starke Konvergenzordnung $\gamma = \frac{1}{2}$ hat (vgl. [10, Th. 10.2.2]).

Wir definieren durch $\mathcal{G}_h := \mathcal{G}(\tau_h, L^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R}^d))$ die Menge aller adaptierten Gitterfunktionen mit Werten in $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R}^d)$. Das heißt, für $Y_h \in \mathcal{G}_h$ folgt, dass $Y_h(t_i)$ quadrat-integrierbare und \mathcal{F}_{t_i} -messbare Zufallsvariablen sind ($i = 1, \dots, N_h$). Dabei haben wir die Verknüpfung \mathcal{G}_h mit den Normen (vgl. [12, Sec.1]):

$$\|Y_h\|_{0,h} = [\mathbb{E}(\max_{0 \leq i \leq N} |Y_h(t_i)|^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$\|Y_h\|_{-1,h} = \sum_{j=0}^{k-1} \|Y_h(t_j)\|_{L^2(\Omega)} + [\mathbb{E}(\max_{k \leq i \leq N} |\sum_{j=k}^i Y_h(t_j)|^2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Hier ist (2.4) die stochastische Version der Spijkernorm. Wir bezeichnen die Banachräume $(\mathcal{G}_h, \|\cdot\|_{0,h})$, $(\mathcal{G}_h, \|\cdot\|_{-1,h})$ mit E_h und F_h .

Sei $A_h : E_h \rightarrow F_h$ gegeben durch

$$[A_h Y_h](t_i) = \begin{cases} Y_h(t_i) - \tilde{X}_i, & i = 0, \dots, k-1, \\ \sum_{j=0}^k a_j Y_h(t_{i+j-k}) - \Phi_h(t_i, Y_h(t_{i-k}), \dots, Y_h(t_i), (I_\alpha^{t_i+j-k})_{\alpha,j}), & i = k, \dots, N. \end{cases}$$

Falls X_h die Gitterfunktion ist, die durch das k -Schrittverfahren erzeugt wurde, dann folgt (vgl. Sec. 2 in [12])

$$A_h X_h = 0 \in \mathcal{G}_h.$$

A_h ist wohldefiniert, falls

$$\Phi_h(t_i, Y_h(t_{i-k}), \dots, Y_h(t_i), (I_\alpha^{t_i})_{\alpha \in \mathcal{A}}) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P, \mathbb{R}^d)$$

gilt.

Definition 2.1.1. Das k -Schrittverfahren $(A_h)_{h>0}$ ist konsistent der Ordnung $\gamma > 0$, falls eine Konstante $C > 0$ und eine obere Schrittweitschranke $\bar{h} > 0$ existieren, so dass

$$\|A_h r_h^E X\|_{-1,h} \leq Ch^\gamma \quad (2.5)$$

für alle Zeitgitter τ_h mit $h \leq \bar{h}$ gilt.

Dabei bezeichnet $r_h^E X$ die Restriktion der exakten Lösung X auf das Zeitgitter τ_h , also $[r_h^E X](t_i) = X(t_i)$. Die linke Seite von (2.5) heißt Konsistenzfehler, wo die stochastische Version der Spijkernorm (2.4) verwendet wird. Als Nächstes definieren wir Bistabilität.

Definition 2.1.2. Das k -Schrittverfahren $(A_h)_{h>0}$ heißt bistabil bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{0,h}$, $\|\cdot\|_{-1,h}$, wenn Konstanten $C_1, C_2 > 0$ und eine obere Schrittweitschranke $\bar{h} > 0$ existieren, so dass die Operatoren $A_h : E_h \rightarrow F_h$ bijektiv sind und

$$C_1 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1,h} \leq \|Y_h - Z_h\|_{0,h} \leq C_2 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1,h} \quad (2.6)$$

für alle $Y_h, Z_h \in E_h$ und für alle Zeitgitter τ_h mit $h \leq \bar{h}$ gilt.

Wenn nur die rechte Seite der Ungleichung (2.6) gilt, dann sagt man, dass das k -Schrittverfahren stabil ist. Später werden wir sehen, dass Konsistenz und Stabilität hin-

reichend sind, damit das k -Schrittverfahren $(A_h)_{h>0}$ konvergiert.

Definition 2.1.3. Das k -Schrittverfahren $(A_h)_{h>0}$ heißt konvergent der Ordnung $\gamma > 0$, falls eine Konstante $C > 0$ und eine obere Schrittweitschranke $\bar{h} > 0$ existieren, so dass die Operatoren $A_h : E_h \rightarrow F_h$ bijektiv sind und

$$\|X_h - r_h^E X\|_{0,h} \leq Ch^\gamma \quad (2.7)$$

für alle Zeitgitter τ_h mit $h \leq \bar{h}$ gilt.

Hier bezeichnen wir mit X_h die Lösung der Gleichung $A_h X_h = 0$. Zum Schluss dieses Abschnittes führen wir noch eine Bedingung ein.

(C1) Die Anfangswerte sind konsistent der Ordnung γ , d. h., es existieren Konstanten $C > 0$ und $\bar{h} > 0$, so dass für alle $h \leq \bar{h}$

$$\max_{0 \leq i \leq k-1} \|X(t_i) - \tilde{X}_i\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^\gamma,$$

wobei $\tilde{X}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, \mathcal{F}_{t_i} -messbar sind.

Satz 2.1.4. Wir nehmen an, dass das k -Schrittverfahren $(A_h)_{h>0}$ bistabil ist. Dann für $\gamma > 0$ ist $(A_h)_{h>0}$ genau dann konsistent der Ordnung γ , wenn $(A_h)_{h>0}$ konvergent der Ordnung γ ist. Außerdem existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ und eine obere Schrittweitschranke $\bar{h} > 0$, so dass

$$C_1 \|A_h r_h^E X\|_{-1,h} \leq \|X_h - r_h^E X\|_{0,h} \leq C_2 \|A_h r_h^E X\|_{-1,h}, \quad (2.8)$$

für alle $h < \bar{h}$ gilt, wobei $X_h \in E_h$ die Gleichung $A_h X_h = 0$ erfüllt, und $r_h^E X$ die Restriktion der exakten Lösung X auf das Zeitgitter τ_h ist.

Beweis: Da $(A_h)_{h>0}$ bistabil ist, existiert eine obere Schrittweitschranke $\bar{h} > 0$, so dass für alle $h < \bar{h}$ die Operatoren $A_h : E_h \rightarrow F_h$ bijektiv sind. Damit existiert eine eindeutige Gitterfunktion $X_h \in E_h$, so dass $A_h X_h = 0$ gilt. Wir wenden (2.6) mit $Y_h = X_h$ und $Z_h = r_h^E X$ an. Somit erhalten wir

$$C_1 \|A_h X_h - A_h r_h^E X\|_{-1,h} \leq \|X_h - r_h^E X\|_{0,h} \leq C_1 \|A_h X_h - A_h r_h^E X\|_{-1,h}.$$

Da X_h die Gleichung $A_h X_h = 0$ erfüllt, bekommen wir (2.8).

□

3 Numerische Verfahren für SODE

3.1 Das Itô-Taylor-Verfahren

In diesem Kapitel werden wir die numerischen Verfahren höherer Ordnung anschauen und die Konsistenz dieser Verfahren beweisen. So wie in [10, Chap.5] betrachten wir zuerst die endliche Menge von Multi-Indizes für $\gamma \in \{\frac{n}{2} | n \in \mathbb{N}\}$

$$\mathcal{A}_\gamma = \left\{ \alpha = (j_1, \dots, j_l) \mid 1 \leq l(\alpha) + n(\alpha) \leq 2\gamma \text{ oder } l(\alpha) = n(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\} \quad (3.1)$$

Hier bezeichnen wir mit $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Indizes mit $\alpha_i = 0$. Dann ist das Itô-Taylor-Verfahren der Ordnung γ durch

$$Y_0 = \tilde{X}_0, \\ Y_i - Y_{i-1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} f_\alpha(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_\alpha^{t_i}, \quad 1 \leq i \leq N$$

gegeben. Dabei sind die Koeffizientenfunktionen $f_\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$f_\alpha(t, x) = (L^{j_1} \dots L^{j_l} f)(t, x)$$

definiert. Die Differentialoperatoren L^r haben die Form

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d b^{0,i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{r=1}^m b^{r,i} b^{r,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \\ L^r = \sum_{i=1}^d b^{r,i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad r = 1, \dots, m,$$

wobei $b^{r,i}$ die i -te Komponente der Koeffizientenfunktionen b^r bezeichnet. Hier betrachten wir ein explizites Einschrittverfahren.

Das Itô-Taylor-Verfahren wird durch die Itô-Taylor-Entwicklung konstruiert, die folgende Form hat (vgl. [10, Sec.5.5])

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} f_\alpha(t_{i-1}, X(t_{i-1})) I_\alpha^{t_i} + \sum_{\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{i-1}}^{t_i}, i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

mit den Multi-Indizes $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, hierarchischer Menge \mathcal{A}_γ und entsprechender Restmenge $B(\mathcal{A}_\gamma)$. Für $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ ist der stochastische Zuwachs $I_\alpha^{t_i}$ durch ein l -faches iteriertes stochastisches Itô-Integral gegeben:

$$I_\alpha^{t_i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{s_1} \dots \int_{t_{i-1}}^{s_{l-1}} dW^{j_1}(s_l) \dots dW^{j_l}(s_1), j_i \in \{0, \dots, m\} \quad (3.3)$$

mit $dW^0(s) = ds$.

Das Itô-Taylor-Verfahren besteht aus der Summation über alle Multi-Indizes der hierarchischen Menge. Die Summation über alle Multi-Indizes von der Restmenge bestimmt die Konvergenzordnung des Verfahrens. Das Milstein-Verfahren ist ein Beispiel eines Itô-Taylor-Verfahrens mit der Konvergenzordnung $\gamma = 1$. Für dieses Verfahren ist die hierarchische Menge \mathcal{A}_1 durch

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : 1 \leq l(\alpha) + n(\alpha) \leq 2 \right\} = \left\{ (0), (1), \dots, (m), (i, j) : i, j = 1, \dots, m \right\} \quad (3.4)$$

gegeben, wobei \mathcal{A} die Menge aller Multi-Indizes ist. Im Weiteren benötigen wir die folgenden Bedingungen:

(A3) Die Koeffizientenfunktionen b^r der SODE (2.1) seien hinreichend glatt, so dass die Funktionen f_α existieren und für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathcal{A}$ existiert eine Konstante $L_\alpha > 0$ mit

$$\begin{aligned} |f_\alpha(t, x) - f_\alpha(t, y)| &\leq L_\alpha |x - y|, \\ |f_\alpha(t, x)| &\leq L_\alpha (1 + |x|), \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t \in [0, T]$. Hier ist $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \{0, \dots, m\}^l$ der Länge l .

(C2) Für alle $\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)$ gilt

$$\int_0^T \mathbb{E}(|f_\alpha(s, X(s))|^2) ds < \infty,$$

wobei $B(\mathcal{A}_\gamma)$ eine Restmenge der Itô-Taylor-Entwicklung ist, gegeben durch

$$B(\mathcal{A}_\gamma) = \{ \alpha = (j_1, \dots, j_l) \mid j_1 = 0, \dots, m, \alpha \notin \mathcal{A}_\gamma, (j_2, \dots, j_l) \in \mathcal{A}_\gamma \}$$

(vgl. [10, Chap.5.4]).

3.2 Konsistenz des Itô-Taylor-Verfahrens

Im folgenden Abschnitt beweisen wir die Konsistenz des Itô-Taylor-Verfahrens. Wir wählen $\gamma \in \{\frac{n}{2} | n \in \mathbb{N}\}$ so, dass die alle Bedingungen (A1), (A2), (A3), (C1) und (C2) erfüllt sind. Für die Konsistenzfehlerabschätzung benötigen wir das folgende Resultat aus [10].

Satz 3.2.1. *Unter den Bedingungen (A1), (A2), (A3) gilt die folgende Itô-Taylor-Entwicklung*

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} f_\alpha(t_{i-1}, X(t_{i-1})) I_\alpha^{t_i} + \sum_{\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{i-1}}^{t_i}, \quad (3.5)$$

für alle $i = 1, \dots, N$, wobei für $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in B(\mathcal{A}_\gamma)$

$$I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{i-1}}^{t_i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{s_1} \cdots \int_{t_{i-1}}^{s_{l-1}} f_\alpha(s_l, X(s_l)) dW^{j_1}(s_l) \cdots dW^{j_l}(s_1).$$

Dieser Satz findet sich mit Beweis in [10, Chap. 5, Th. 5.5.1]. Weiter beweisen wir ein Lemma, das wir später im Beweis der Konsistenz brauchen.

Lemma 3.2.2. *Es sei $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stochastischer Prozess, dessen iteriertes Itô-Integral $I_\alpha[f(\cdot)]_s^t$ für alle $0 \leq s < t \leq T$ existiert. Wenn*

$$\int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2) du < \infty,$$

dann gilt

$$\mathbb{E}(|I_\alpha[f(\cdot)]_s^t|^2) \leq \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2) du (t-s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-1} \quad (3.6)$$

für alle $0 \leq s < t \leq T$ und alle Multi-Indizes α .

Beweis: Der Beweis wird induktiv durchgeführt.

Für $l(\alpha) = 1$ folgt $\alpha = (j_1)$. In dem Fall $j_1 \neq 0$ wird die Ungleichung (3.6) durch die Itô-Isometrie zu einer Gleichung:

$$\mathbb{E}(|I_\alpha[f(\cdot)]_s^t|^2) = \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2)du,$$

denn $l(\alpha)+n(\alpha)-1 = 0$. Im Falle $j_1 = 0$ bekommen wir nach der Jensenschen Ungleichung

$$\mathbb{E}(|\int_s^t f(u)du|^2) \leq (t-s)^{(1+1-1)} \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2)du.$$

Sei jetzt $l(\alpha) > 1$ mit $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$. Zuerst betrachten wir den Fall $j_l = 0$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_\alpha[f(\cdot)]_s^t|^2) &= \mathbb{E}(|\int_s^t \int_s^{s_1} \dots \int_s^{s_{l-1}} f(s_l) dW^{j_1}(s_l) \dots \underbrace{dW^{j_l}(s_1)}_{=ds_1}|^2) \\ &\stackrel{\text{Jensen.-Ungl.}}{\leq} (t-s) \int_s^t \mathbb{E}(|\int_s^{s_1} \dots \int_s^{s_{l-1}} f(s_l) dW^{j_1}(s_l) \dots dW^{j_{l-1}}(s_2)|^2) ds_1 \\ &= (t-s) \int_s^t \mathbb{E}(|I_{\tilde{\alpha}}[f(\cdot)]_s^{s_1}|^2) ds_1, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\alpha} = (j_1, \dots, j_{l-1})$ mit der Länge $l(\tilde{\alpha}) = l(\alpha) - 1$, $n(\tilde{\alpha}) = n(\alpha) - 1$.

Aus der Induktionshypothese folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_{\tilde{\alpha}}[f(\cdot)]_s^{s_1}|^2) &\leq \int_s^{s_1} \mathbb{E}(|f(u)|^2)du (s_1 - s)^{l(\tilde{\alpha})+n(\tilde{\alpha})-1} \\ &= \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2)du (t-s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-3}. \end{aligned}$$

Wir setzen das letzte Resultat in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_\alpha[f(\cdot)]_s^t|^2) &\leq (t-s) \int_s^t \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2)du (t-s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-3} ds_1 \\ &\leq \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2)du (t-s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-1}. \end{aligned}$$

Wenn $j_l \neq 0$, dann erhalten wir mit der Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}(|I_\alpha[f(\cdot)]_s^t|^2) = \int_s^t \mathbb{E}(|I_{\tilde{\alpha}}[f(\cdot)]_s^{s_1}|^2) ds_1, \quad (3.7)$$

wobei $\tilde{\alpha} = (j_1, \dots, j_{l-1})$ mit $l(\tilde{\alpha}) = l(\alpha) - 1$ und $n(\tilde{\alpha}) = n(\alpha)$. Durch die Anwendung der Induktionshypothese erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|I_{\tilde{\alpha}}[f(\cdot)]_s^{s_1}|^2) &\leq \int_s^{s_1} \mathbb{E}(|f(u)|^2) du (s_1 - s)^{l(\tilde{\alpha})+n(\alpha)-1} \\ &= \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2) du (t - s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-2}.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (3.7) ein:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|I_{\alpha}[f(\cdot)]_s^t|^2) &\leq \int_s^t \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2) du (t - s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-2} \\ &\leq \int_s^t \mathbb{E}(|f(u)|^2) du (t - s)^{l(\alpha)+n(\alpha)-1},\end{aligned}$$

was die Behauptung in (3.6) bestätigt. □

Im Folgenden weisen wir die Konsistenzfehlerabschätzung (2.5) für das Itô-Taylor-Verfahren nach:

$$\|A_h^{ITS} r_h^E X\|_{-1,h} = \|X(0) - \tilde{X}_0\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i [A_h^{ITS} r_h^E X](t_j) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Hier wird die stochastische Version der Spijkernorm (2.4) verwendet. Der erste Summand von der rechten Seite (3.8) ist nach der Bedingung (C1) konsistent. Es soll nur noch der zweite Summand abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i [A_h^{ITS} r_h^E X](t_j) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i [X(t_j) - X(t_{j-1}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_j}] \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left[\sum_{\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} \right] \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)} \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Hier haben wir den Satz 3.2.1 und die Dreiecksungleichung angewendet. Da die Restmenge $B(\mathcal{A}_\gamma)$ endlich ist (vgl. [10, Chap.5]), reicht es jeden Summanden separat abzuschätzen. Als Erstes betrachten wir alle Multi-Indizes $\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)$ mit der Länge

$l = l(\alpha) = n(\alpha)$, d. h., $\alpha = (0, \dots, 0)$. Dann erhalten wir mit der Jensensche-Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i I_\alpha [f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\int_{t_{j-1}}^{s_1} \cdots \int_{t_{j-1}}^{s_{l-1}} f_\alpha(s_l, X(s_l)) ds_l \cdots ds_1}_{(l-1)\text{-Integrale}} \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \frac{1}{(l-1)!} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_\alpha(s, X(s)) (t_j - s)^{l-1} ds \right|^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{(l-1)!} \right)^2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} ih \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\left| f_\alpha(s, X(s)) \right|^2}_{\leq h^{2(l-1)}} (t_j - s)^{2(l-1)} ds \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{(l-1)!} \right)^2 T \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E} \left(\left| f_\alpha(s, X(s)) \right|^2 \right) ds h^{2l-2} \\
&= \left(\frac{1}{(l-1)!} \right)^2 T \underbrace{\int_0^T \mathbb{E} \left(\left| f_\alpha(s, X(s)) \right|^2 \right) ds}_{< \infty} h^{2l-2}.
\end{aligned}$$

Nach der Definition von \mathcal{A}_γ und $B(\mathcal{A}_\gamma)$ (siehe (3.1) und Bedingung (C2)) bekommen wir $\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)$ mit $l = l(\alpha) = n(\alpha)$ nur dann, wenn $l = l(\alpha) = \gamma + 1$ oder $l = l(\alpha) = \gamma + \frac{3}{2}$. Also, $h^{l-1} = \mathcal{O}(h^\gamma)$.

Jetzt schätzen wir den Summanden mit allen Indizes $\alpha \in B(\mathcal{A}_\gamma)$ ab, so dass $n(\alpha) < l(\alpha)$. In diesem Fall muss man beachten, dass

$$\mathbb{E} \left(I_\alpha [f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} | \mathcal{F}_{t_i} \right) = 0,$$

für alle $i < j$ (vgl. [10, Lemma 5.7.1]) gilt, wie wir im Folgenden zeigen.

Für $j_l \neq 0$ erhalten wir

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{t_{j-1}}^{s_1} \cdots \int_{t_{j-1}}^{s_{l-1}} f_\alpha(s_l, X(s_l)) dW_{s_l}^{j_1} \cdots dW_{s_1}^{j_l} | \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right) = 0.$$

(vgl. [10, Chap.5]). Für $j_l = 0$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{t_{j-1}}^{s_1} \cdots \int_{t_{j-1}}^{s_{l-1}} f_\alpha(s_l, X(s_l)) dW_{s_l}^{j_1} \cdots dW_{s_1}^{j_l} | \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right) \\
&= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E} \left(\int_{t_{j-1}}^{s_1} \cdots \int_{t_{j-1}}^{s_{l-1}} f_\alpha(s_l, X(s_l)) dW_{s_l}^{j_1} \cdots dW_{s_2}^{j_{l-1}} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) ds_1,
\end{aligned}$$

da $dW_s^0 = ds$ gilt. Das setzen wir iterativ bis zu einem Index $j_i \neq 0$ fort mit $j_\nu = 0$ für

$i < \nu \leq l$.

Daher ist $(S_i)_{i=1, \dots, N}$ mit

$$S_i = \sum_{j=1}^i I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j}$$

ein diskretes Martingal. Weiterhin bekommen wir durch das Lemma 3.2.2 folgende Abschätzung:

$$\mathbb{E}\left(\left|I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j}\right|^2\right) \leq h^{l(\alpha)+n(\alpha)-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E}\left(\left|f_\alpha(u, X(u))\right|^2\right) du \quad (3.9)$$

für alle $j = 1, \dots, N$. Durch das Anwenden von Doob's-Martingal-Ungleichung (siehe Lemma 6.1.1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left|\sum_{j=1}^i I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j}\right|^2\right) &\leq 4\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^N I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j}\right|^2\right) \\ &= 4 \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left(\left|I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j}\right|^2\right) \stackrel{(3.9)}{\leq} 4 \int_0^T \mathbb{E}\left(\left|f_\alpha(u, X(u))\right|^2\right) du h^{l(\alpha)+n(\alpha)-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von \mathcal{A}_γ und $B(\mathcal{A}_\gamma)$ gilt auch in diesem Fall, dass $l(\alpha)+n(\alpha)-1 \geq 2\gamma$. Folglich haben wir bewiesen, dass unter den gegebenen Bedingungen das Itô-Taylor-Verfahren konsistent der Ordnung γ ist.

□

3.3 Balanced-Milstein-Verfahren und dessen Konsistenz

In diesem Abschnitt betrachten wir ein implizites ausbalanciertes numerisches Einschrittverfahren höherer Ordnung, das als Balanced-Milstein-Verfahren bezeichnet wird. In dem Verfahren werden zwei Methoden kombiniert. Eine davon ist das explizite Milstein-Verfahren und die andere ist das implizite ausbalancierte Verfahren (BIM). Dann hat das Balanced-Milstein-Verfahren für die stochastische Differentialgleichung (2.1) folgende Form:

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_{i-1} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_\alpha^{t_{i-1}, t_i} \\ &\quad + \left(d^0(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(0)}^{t_{i-1}, t_i} + \sum_{r=1}^m d^r(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r,r)}^{t_{i-1}, t_i}\right) (Y_{i-1} - Y_i), \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit Koeffizientenfunktionen $f_\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und hierarchischer Menge \mathcal{A}_1 wie in (3.4). Die Funktionen d^0, d^1, \dots, d^m sind $d \times d$ -matrix-wertige Gewichtsfunktionen.

Das Balanced-Milstein-Verfahren kann man auch in durchmultiplizierter Form darstellen:

$$Y_i = Y_{i-1} + M_i^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_\alpha^{t_{i-1}, t_i}. \quad (3.11)$$

mit $M_i = \mathbb{I} + d^0(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(0)}^{t_{i-1}, t_i} + \sum_{r=1}^m d^r(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r,r)}^{t_{i-1}, t_i}$. Ab diesem Schritt betrachten wir BMM in der expliziten Form. Um die nachfolgende Beweise zu vereinfachen werden wir annehmen, dass die Gewichtsfunktionen d^r Konstanten sind.

Im nächsten Satz wird die Konsistenz des Balanced Milstein-Verfahrens erläutert. In dem Beweis benötigen wir noch folgende Bedingung (vgl. [9, Sec.2.1])

(C3) Für die gegebenen $d^r \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $r = 0, \dots, m$ existiert eine reelle Konstante $K_M > 0$, so dass

$$|M_i^{-1}| \leq K_M$$

gilt.

Satz 3.3.1. *Unter den gegebenen Bedingungen (A1), (A2), (A3), (C1) und (C3) ist das Balanced Milstein-Verfahren (3.11) konsistent der Ordnung $\gamma = 1$.*

Bevor wir die Konsistenz beweisen, betrachten wir folgende Lemmas (vgl. Lemma 2.8. in [9]):

Lemma 3.3.2. *Angenommen $0 \leq t - s \leq 1$. Dann existiert für alle $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ und $p = 1, 2, \dots$, eine reelle Konstante K so, dass*

$$\mathbb{E} \left[\left(I_\alpha^{s,t} I_{\alpha'}^{s,t} \right)^{2p} \right] \leq K (t-s)^{p(l(\alpha) + l(\alpha'))}, \quad \alpha, \alpha' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}. \quad (3.12)$$

gilt.

Beweis: Der Beweis stützt sich auf den elementaren Beziehungen zwischen den binomischen Formel, dem Fakt, dass

$$\mathbb{E} \left[\xi \right]^{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}, \quad (3.13)$$

gilt (siehe unten (3.15)), wobei $\xi \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 = t - s$ ist (vgl. [1, Satz 7.1.2]) und Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Seien $\Delta W^j = W^j(t) - W^j(s)$ und $h = t - s \leq 1$ für jedes $s \leq t$ gegeben. Die folgenden Rechnungen benötigen wir für den nachfolgenden Beweis. Sei $\alpha \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ mit der Länge $l(\alpha) = 1$, also, $\alpha = (i)$, $i = 1, \dots, m$. Es gilt nach (3.13)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_\alpha^{s,t}\right)^{2p}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(I_{(i)}^{s,t}\right)^{2p}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\Delta W^i\right)^{2p}\right] \\ &= (2p-1)!!h^p, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei

$$\mathbb{E}[(\Delta W^i)^{2p}] = (2p-1)!!h^p = (2p-1)(2p-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 \cdot (t-s)^p \quad (3.15)$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt. Weiter betrachten wir den Fall für $\alpha \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ mit der Länge $l(\alpha) = 2$. Sei $\alpha = (i, i)$ mit $i = 1, \dots, m$. Es gilt nach binomischer Formel und (3.13) für $p = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_{(i,i)}^{s,t}\right)^{2p}\right] &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E}\left[\left((\Delta W^i)^2 - h\right)^{2p}\right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (\Delta W^i)^{2(2p-k)} h^k\right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k h^k \mathbb{E}\left[(\Delta W^i)^{2(2p-k)}\right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k)-1)!!h^{2p}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sei $\alpha = (i, j)$ mit $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$. Es folgt mit der Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung (siehe Lemma 6.1.2 in Appendix)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_{(i,j)}^{s,t}\right)^{2p}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \int_s^z dW^i(s) dW^j(z)\right)^{2p}\right] \\ &\leq K_{BDG} \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (W^i(z) - W^i(s))^2 dz\right)^p\right] \\ &\leq K_{BDG} h^{p-1} \int_s^t \mathbb{E}\left[\left(W^i(z) - W^i(s)\right)^{2p}\right] dz \\ &\leq K_{BDG} h^{p-1} \int_s^t (2p-1)!!(z-s)^p dz \\ &\leq K_{BDG} h^{p-1} (2p-1)!! \frac{(t-s)^{p+1}}{p+1} \\ &\leq \frac{(2p-1)!!}{p+1} K_{BDG} h^{2p}, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei K_{BDG} die Burkholder-Davis-Gundy-Konstante ist.

Jetzt betrachten wir die Ungleichung (3.12) für alle $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ mit $\alpha = (j)$ und $\alpha' = (l, l)$, $j \neq l$, $j, l = 1, \dots, m$. Es folgt nach (3.14) und (3.16) für alle $p = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(I_{(j)}^{s,t} I_{(l,l)}^{s,t} \right)^{2p} \right] &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E} \left[\left(\Delta W^j \left((\Delta W^l)^2 - h \right) \right)^{2p} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E} \left[\left(\Delta W^j \right)^{2p} \right] \mathbb{E} \left[\left((\Delta W)^2 - h \right)^{2p} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} (2p-1)!! h^p \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k) - 1)!! h^{2p} \\ &= K h^{p(l(\alpha)+l(\alpha'))}, \end{aligned}$$

mit $K = \frac{(2p-1)!!}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k) - 1)!!$. Für den Fall $j = l$ und $j, l = 1, \dots, m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(I_{(j)}^{s,t} I_{(j,j)}^{s,t} \right)^{2p} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\Delta W^j \frac{(\Delta W^j)^2 - h}{2} \right)^{2p} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E} \left[\left((\Delta W^j)^3 - \Delta W^j h \right)^{2p} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (\Delta W^j)^{3(2p-k)} h^k (\Delta W^j)^k \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k \mathbb{E} \left[(\Delta W^j)^{2(3p-k)} h^k \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(3p-k) - 1)!! h^{3p} \\ &= K h^{p(l(\alpha)+l(\alpha'))}, \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

mit $K = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(3p-k) - 1)!!$. Weiter betrachten wir die Ungleichung (3.12) für alle $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ mit $\alpha = \alpha' = (l, l)$, $l = 1, \dots, m$ und $p = 1, 2, \dots$. Es gilt nach (3.16)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} I_{(l,l)}^{s,t} \right)^{2p} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} \right)^{2 \cdot 2p} \right] \\ &= \frac{1}{2^{4p}} \sum_{k=0}^{4p} \binom{4p}{k} (-1)^k (2(4p-k) - 1)!! h^{4p} \quad (3.18) \\ &= K h^{p(l(\alpha)+l(\alpha'))}, \end{aligned}$$

mit $K = \frac{1}{2^{4p}} \sum_{k=0}^{4p} \binom{4p}{k} (-1)^k (2(4p-k) - 1)!!$. Wegen der Unabhängigkeit der Integrale für $l \neq i, j$ mit $l, i, j = 1, \dots, m$ erhalten wir mit (3.16) und (3.17)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} I_{(i,j)}^{s,t} \right)^{2p} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} \right)^{2p} \right] \mathbb{E} \left[\left(I_{(i,j)}^{s,t} \right)^{2p} \right] \\ &\leq \frac{(2p-1)!!}{2^{2p(p+1)}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k) - 1)!! K_{BDG} h^{4p} \quad (3.19) \\ &= Kh^{p(l(\alpha)+l(\alpha'))}, \quad p = 1, 2, \dots, . \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $K = \frac{(2p-1)!!}{2^{2p(p+1)}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k) - 1)!! K_{BDG}$. Hierbei ist K_{BDG} die Burkholder-Davis-Gundy-Konstante. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Aussage von Lemma 3.3.2 für alle $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{(0)\}$ mit $\alpha = (l, l)$ und $\alpha' = (i, j)$ für $l = i \neq j$ oder $l = j \neq i$, $l, i, j = 1, \dots, m$ gilt. Aufgrund der Symmetrie betrachten wir nur einen von beiden Fällen. Sei $l = i \neq j$. Es gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Abschätzungen (3.18), (3.19)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} I_{(l,j)}^{s,t} \right)^{2p} \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[\left(I_{(l,l)}^{s,t} \right)^{4p} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\left(I_{(l,j)}^{s,t} \right)^{4p} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{4p}} \sum_{k=0}^{4p} \binom{4p}{k} (-1)^k (2(4p-k) - 1)!! h^{4p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\frac{(2p-1)!!}{2^{2p(p+1)}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (2(2p-k) - 1)!! K_{BDG} h^{4p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Kh^{p(l(\alpha)+l(\alpha'))}, \end{aligned}$$

mit $K = \frac{\sqrt{(2p-1)!! K_{BDG}}}{2^{3p} \sqrt{p+1}} \left(\sum_{k=0}^{4p} \binom{4p}{k} (-1)^k (8p-2k-1)!! \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k (4p-2k-1)!! \right)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt die Aussage des Lemmas 3.3.2. □

Das folgende Lemma wird in mehreren Abschätzungen verwendet.

Lemma 3.3.3. *Es sei $(F_j)_{j=1, \dots, N}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $F_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P; \mathbb{R}^d)$. Dann ist die Summe*

$$G_k = \sum_{j=1}^k \left[F_j - \mathbb{E} \left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right], \quad k = 1, \dots, N$$

ein diskretes Martingal und es gilt die Abschätzung

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i F_j \right|^2\right) \leq 32 \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left(|F_j|^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) \right|^2\right). \quad (3.20)$$

Beweis: Nach den Eigenschaften der bedingte Erwartung gilt für jedes $k > l$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(G_k | \mathcal{F}_{t_l}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^k \left[F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] | \mathcal{F}_{t_l}\right) = \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\left(F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_l}\right) \\ &= \sum_{j=1}^l \mathbb{E}\left(F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_l}\right) + \sum_{j=l+1}^k \mathbb{E}\left(F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_l}\right) \\ &= \sum_{j=1}^l \mathbb{E}\left(F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_l}\right) + \sum_{j=l+1}^k \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_l}\right) - \underbrace{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_l}\right)}_{= \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_l}\right)} \\ &= \sum_{j=1}^l F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) = G_l. \end{aligned}$$

Daher ist G_k ein diskretes Martingal. Weiter gilt es

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i F_j \right|^2\right) \\ &\leq 2\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left[F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] \right|^2\right) \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) \right|^2\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hier wurde die Formel $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ angewendet. Da der erste Term ein diskretes Martingal ist, erhält man durch Doob's-Martingal-Ungleichung (siehe Lemma 6.1.1 in Appendix) und Martingaleigenschaften

$$\begin{aligned} &2\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left[F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] \right|^2\right) \\ &\leq 8\mathbb{E}\left(\left| \sum_{j=1}^N \left[F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] \right|^2\right) \\ &= 8\left\{ \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left(\left| F_j - \mathbb{E}\left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right) \right|^2\right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{j < k} \mathbb{E} \left(\left\langle F_j - \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}), F_k - \mathbb{E}(F_k | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right).$$

Da im letzten Summanden die beiden Terme orthogonal zueinander sind, folgt für $j < k$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left\langle F_j - \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}), F_k - \mathbb{E}(F_k | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\left\langle F_j - \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}), F_k - \mathbb{E}(F_k | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \middle| \mathcal{F}_{t_j} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\langle F_j - \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}), \mathbb{E}(F_k - \mathbb{E}(F_k | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_{t_j}) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter benutzen wir die Aussage, dass

$$\mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) \right|^2 \right) \leq \mathbb{E} \left(|X|^2 \right), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

gilt und erhalten

$$\begin{aligned} & 8 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| F_j - \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) \right|^2 \right) \\ & \leq 16 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(|F_j|^2 \right) + 16 \sum_{j=1}^N \underbrace{\mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E}(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) \right|^2 \right)}_{\leq \mathbb{E} \left(|F_j|^2 \right)} \\ & \leq 32 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(|F_j|^2 \right). \end{aligned}$$

Also, es entspricht zusammen mit (3.21) der Ungleichung (3.20).

□

Beweis von Satz 3.3.1 Nach der Definition 2.1.1 folgt

$$\|A_h^{BMM} r_h^E X\|_{-1,h} = \|X(0) - \tilde{X}_0\|_{L^2} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i [A_h^{BMM} r_h^E X](t_j) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Hier wird die stochastische Version der Spijkernorm verwendet. Der erste Summand der rechten Seite (3.23) ist nach der Bedingung (C1) konsistent. Daher schätzen wir nur

den zweiten Summanden ab, indem wir das Milstein-Verfahren dazwischen setzen:

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i [A_h^{BMM} r_h^E X](t_j) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left[X(t_j) - X(t_{j-1}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (\mathbb{I} - M_j^{-1}) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right] \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left[X(t_j) - X(t_{j-1}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right] \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i (\mathbb{I} - M_j^{-1}) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_1)} I_\alpha [f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i (\mathbb{I} - M_j^{-1}) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Hier wurde die Dreiecksungleichung und Satz 3.2.1 angewendet. Im Abschnitt 3.2 wurde schon gezeigt, dass für jedes $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_1)$

$$\left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i I_\alpha [f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t_{j-1}}^{t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch$$

gilt. Daher muss noch der letzte Summand abgeschätzt werden. Wir führen die Differenz $\mathbb{I} - M_j^{-1}$ auf einen gemeinsamen Nenner

$$\mathbb{I} - M_j^{-1} = \left(d^0 h + \sum_{l=1}^m d^l I_{(l,l)}^{t_{j-1}, t_j} \right) M_j^{-1} \tag{3.24}$$

und setzen das in den letzten Summanden ein

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \left(d^0 h + \sum_{l=1}^m d^l I_{(l,l)}^{t_{j-1}, t_j} \right) M_j^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i d^0 h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^m d^l I_{(l,l)}^{t_{j-1}, t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& =: S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir die Summe S_1 für alle Multi-Indizes $\alpha \in \mathcal{A}_1$ mit $l = l(\alpha) = n(\alpha)$ (vgl. Abschnitt 3.1). Es folgt mit der Matrixnorm $\|d^0\|$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i d^0 h M_j^{-1} b^0(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_{(0)}^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
& \leq |d^0|^2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i h^2 M_j^{-1} b^0(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\
& \leq |d^0|^2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} i h^4 \sum_{j=1}^i |M_j^{-1}|^2 |b^0(t_{j-1}, X(t_{j-1}))|^2 \right) \\
& \leq |d^0|^2 T K_M^2 \sum_{j=1}^N h^3 \mathbb{E} \left(\underbrace{|b^0(t_{j-1}, X(t_{j-1}))|^2}_{\leq K^2(1 + \sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2)} \right) \\
& \leq CT^2 h^2.
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Jensensche-Ungleichung und die Bedingungen (A2), (C3) angewendet. Weiter betrachten wir diesen Term für $\alpha \neq (0)$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i d^0 h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
& \leq |d^0|^2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir das Lemma 3.3.3 an und definieren die Folge F_j durch

$$F_j =: h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Nach der Abschätzung (3.20) folgt

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i F_j \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq 32 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(|F_j|^2 \right) + 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E} \left(F_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir die Summe T_1 . Da $\mathbb{E}(|I_\alpha^{t_{i-1}, t_i}|^2) \leq Ch^{l(\alpha)+n(\alpha)}$ (vgl. Lemma 3.2.2 im Abschnitt 3.2 oder [10, Lemma 5.7.2]), erhalten wir

$$\begin{aligned} T_1 &= 32 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\ &\leq 32 K_M^2 L_\alpha^2 \left[1 + \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2 \right) \right] \sum_{j=1}^N h^2 \mathbb{E} \left(\left| I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\ &\leq CT h^{1+l(\alpha)}. \end{aligned}$$

Hier wurden die Bedingungen (A3) und (C3) angewendet. Als Nächstes betrachten wir T_2 . Da für alle $\alpha \in \mathcal{A}_1$ mit $\alpha \neq (0)$ die Terme $f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1}))$ unabhängig von stochastischen Integralen $I_\alpha^{t_{j-1}, t_j}$ und der Matrix M_j^{-1} sind, gilt

$$\begin{aligned} T_2 &= 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E} \left(h M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \\ &= 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i h \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} i h^2 \sum_{j=1}^i \left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\ &\leq 2Th \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \tag{3.25} \\ &= 2Th \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \mathbb{E} \left(\left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\ &\leq 2Th L_\alpha^2 \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \underbrace{\left(1 + \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2 \right) \right)}_{< \infty}. \end{aligned}$$

Hier wurden Jensensche-Ungleichung und Bedingung (A3) benutzt.

Da

$$\mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) = \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} - I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \tag{3.26}$$

gilt, folgt mit (3.22), (3.24) und Lemma 3.3.2

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(M_j^{-1}I_\alpha^{t_{j-1},t_j}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right|^2\right) \\
& \leq \mathbb{E}\left(\left|(M_j^{-1}-\mathbb{I})I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right) \\
& = \mathbb{E}\left(\left|M_j^{-1}\left(d^0h+\sum_{l=1}^m d^l I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j}\right)I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right) \\
& \leq 2K_M^2|d^0|^2h^2\mathbb{E}\left(\left|I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right)+2mK_M^2\sum_{l=1}^m|d^l|^2\mathbb{E}\left(\left|I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j}I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right) \\
& \leq Ch^{2+l(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Daher erhalten wir

$$T_2 \leq 2L_\alpha^2CTh \sum_{j=1}^N h^{2+l(\alpha)} \leq \bar{C}T^2h^{2+l(\alpha)}.$$

Also, $S_1 \leq Ch$. Weiter betrachten wir den zweiten Summanden S_2 . Mit der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{-1,h}$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left|\sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^m d^l I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \sum_{l=1}^m |d^l|^2 \left(\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left|\sum_{j=1}^i I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sei die Folge F_j wie im Lemma 3.3.3 durch

$$F_j := I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

definiert. Wir setzen sie in der obigen Ungleichung ein. Nach (3.20) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left|\sum_{j=1}^i I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right) \\
& \leq 32 \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left(\left|I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j}\right|^2\right) \\
& + 2\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq N} \left|\sum_{j=1}^i \mathbb{E}\left(I_{(l,l)}^{t_{j-1},t_j} M_j^{-1} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1},t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right|^2\right) \\
& =: Q_1 + Q_2.
\end{aligned}$$

So wie es schon oben gemacht wurde, schätzen wir diese Summanden separat ab. Wenden

die Bedingungen (A3), (C3) und Lemma 3.3.2 an und erhalten

$$\begin{aligned}
Q_1 &\leq 32K_M^2 L_\alpha^2 \left(1 + \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2 \right) \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \right) \\
&\leq 32K_M^2 L_\alpha^2 \left(1 + \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2 \right) \right) \sum_{j=1}^N K h^{2+l(\alpha)} \\
&\leq CT h^{1+l(\alpha)},
\end{aligned}$$

für $\alpha' = (l, l)$. Weiter gilt für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 2\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \\
&= 2\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^i \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq 2\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} i \sum_{j=1}^i \left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq 2N \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq 2N \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \underbrace{\mathbb{E} \left(\left| f_\alpha(t_{j-1}, X(t_{j-1})) \right|^2 \right)}_{\leq L_\alpha^2 (1 + \sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2)}.
\end{aligned}$$

Wir wenden die Bedingung (C3), das Lemma 3.3.2, die Abschätzungen (3.14), (3.16) und (3.17) an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\left| \mathbb{E} \left(M_j^{-1} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right|^2 \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\left| \left(M_j^{-1} - \mathbb{I} \right) I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left| M_j^{-1} \left(d^0 h + \sum_{l=1}^m d^l I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} \right) I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
&\leq 2K_M^2 |d^0|^2 h^2 \mathbb{E} \left(\left| I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
&\quad + 2K_M^2 \sum_{l=1}^m |d^l|^2 \mathbb{E} \left(\left| I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^2 \right) \\
&\leq 2K_M^2 |d^0|^2 C h^{2+2+l(\alpha)} + 2K_M^2 \sum_{l=1}^m |d^l|^2 \left(\mathbb{E} \left(\left| \left(I_{(l, l)}^{t_{j-1}, t_j} \right)^2 \right|^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left(\left| I_\alpha^{t_{j-1}, t_j} \right|^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq Ch^{4+l(\alpha)}.$$

Dann setzen wir das Ergebnis in den Summanden Q_2 ein und bekommen

$$Q_2 \leq 2NL_\alpha^2 C \sum_{j=1}^N h^{4+l(\alpha)} \leq \bar{C}T^2 h^{2+l(\alpha)}.$$

Da $l(\alpha) \leq 2$ (vgl. (3.4) im Abschnitt 3.1) folgt, dass durch die Anwendung der Spijkernorm (2.4) das Balanced-Milstein-Verfahren konsistent mindestens der Ordnung 1 ist.

□

Bemerkung 3.3.4. *Die Konsistenz des Balanced-Milstein-Verfahrens kann man auch in der impliziten Form mit der Anwendung der Spijkernorm beweisen. In diesem Fall hat dieses Verfahren auch die Konsistenzordnung 1.*

4 Charakterisierung der Bistabilität

4.1 Bistabilität eines Einschrittverfahrens

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Bistabilität der expliziten numerischen Einschrittverfahren. Insbesondere werden wir die Bistabilität des Itô-Taylor-Verfahrens und Balanced-Milstein-Verfahrens untersuchen.

Zuerst führen wir die folgende Lipschitz-Typ-Bedingung für die Inkrementfunktion Φ_h ein (vgl. Sec.3 in [12])

(S) Es existiert ein $L > 0$, so dass für alle $j = 1, \dots, N, Y_h, Z_h \in \mathcal{G}_h$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \left[\Phi_h(t_\eta, Y_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}}) - \Phi_h(t_\eta, Z_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}}) \right] \right|^2 \right) \\ & \leq Lh \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \end{aligned}$$

gilt.

Ein wichtiger Schritt in der Charakterisierung der bistabilen numerischen Verfahren ist zu erkennen, dass die Bistabilität nur von dem linearen Teil des Operators A_h abhängt, während der Restteil die Lipschitz-Bedingung (S) erfüllt (vgl. Sec.4.1 in [12]). Wir definieren durch $L_h : E_h \rightarrow F_h$ einen linearen Teil des Operators A_h mit

$$[L_h Y_h](t_i) = \begin{cases} Y_h(t_0), \\ Y_h(t_i) - Y_h(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.1)$$

Den residualen Operator bezeichnen wir als $T_h := A_h - L_h$.

Lemma 4.1.1. *Der Operator L_h in (4.1) ist bistabil, d. h., es existieren die Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle $Y_h \in E_h$*

$$C_1 \|L_h Y_h\|_{-1,h} \leq \|Y_h\|_{0,h} \leq C_2 \|L_h Y_h\|_{-1,h} \quad (4.2)$$

gilt.

Beweis: Zuerst betrachten wir die linke Seite der Ungleichung (4.2). Es gilt nach (2.4)

$$\begin{aligned}
\|L_h Y_h\|_{-1,h} &= \|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{\eta=1}^i L_h Y_h(t_\eta) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{\eta=1}^i Y_h(t_\eta) - Y_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} |Y_h(t_i) - Y_h(0)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} |Y_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 3 \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |Y_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 3\|Y_h\|_{0,h}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Eigenschaften der Teleskopsumme benutzt. Weiterhin gilt für die rechte Seite von (4.2)

$$\begin{aligned}
\|Y_h\|_{0,h} &= \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |Y_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| Y_h(0) + \sum_{\eta=1}^i Y_h(t_\eta) - Y_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{\eta=1}^i Y_h(t_\eta) - Y_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|Y_h(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{\eta=1}^i L_h Y_h(t_\eta) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|L_h Y_h\|_{-1,h}.
\end{aligned}$$

Also, der Operator L_h erfüllt die Ungleichung (4.2). Weiter beweisen wir die Aussage aus (2.6), dass der Operator L_h bijektiv ist. Sei $Z_h \in F_h$. Wir zeigen, dass $Y_h \in E_h$ mit

$$L_h Y_h = Z_h \tag{4.3}$$

existiert. Mit der Gleichung (4.3) haben wir für Gitterfunktionen und alle $t_i \in \tau_h$, $i = 1, \dots, N$ ein System von Gleichungen zu lösen:

$$[L_h Y_h](t_i) = Z_h(t_i).$$

Für $i = 0$ folgt

$$L_h Y_h(t_0) = Y_h(t_0).$$

Daher erhalten wir $Y_h(t_0) := Z_h(t_0)$. Weiterhin bekommen wir für alle $i = 1, \dots, N$

$$L_h Y_h(t_i) = Z_h(t_i).$$

Dann folgt nach (4.1)

$$Y_h(t_i) := Y_h(t_{i-1}) + Z_h(t_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Durch die Induktion bekommen wir eine eindeutige Gitterfunktion Y_h auf τ_h , die die Gleichung (4.3) erfüllt.

□

Das Ziel dieses Abschnittes ist, den folgenden Satz zu beweisen (vgl. Lemma 4.2 in [12]):

Satz 4.1.2. *Ein explizites Einschrittverfahren ist unter der Bedingung (S) bistabil.*

Für den Beweis benötigen wir das folgende diskrete Gronwall-Lemma.

Lemma 4.1.3. *Seien die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ und eine positive reelle Folge $(x_j)_{j=0, \dots, N}$, $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$x_j \leq \gamma_1 + \gamma_2 \sum_{\eta=0}^{j-1} x_\eta$$

gegeben. Dann gilt für alle $j = 0, \dots, N$

$$x_j \leq \gamma_1 e^{j\gamma_2}.$$

Beweis von Satz 4.1.2 Da (2.6) für den Operator L_h erfüllt ist, betrachten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} \left| \left(Y_h(t_i) - Z_h(t_i) \right) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_2 \left[\|Y(0) - Z(0)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (L_h Y_h(t_\eta) - L_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \tag{4.4}$$

die für alle $h, Y_h, Z_h \in E_h$ und $0 \leq j \leq N$ gilt. Zum Beweisen fixieren wir die Schrittweite h , die Gitterfunktion $Y_h \in E_h$ und $0 \leq j \leq N$ beliebig. Für jedes $Z_h \in E_h$ existiert eine eindeutige Lösung $X_h \in E_h$ zur Differenzgleichung

$$[L_h X_h](t_i) = \begin{cases} [L_h Z_h](t_i), & \text{für } 0 \leq i \leq j, \\ [L_h Y_h](t_i), & \text{für } j+1 \leq i \leq N, \end{cases}$$

da L_h für alle $h > 0$ bijektiv ist (vgl. Sec. 4.2 in [12]). Nach (2.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} |Y_h(t_i) - X_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|Y_h - X_h\|_{0,h} \\ &\leq C_2 \|L_h Y_h - L_h X_h\|_{-1,h} \\ &= C_2 \left[\| (Y(0) - Z(0)) \|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (L_h Y_h(t_\eta) - L_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

So haben wir die Abschätzung (4.4) bewiesen. Durch das Einsetzen $L_h = A_h - T_h$ in (4.4) bekommt man

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \left[\| (Y(0) - Z(0)) \|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (A_h Y_h(t_\eta) - T_h Y_h(t_\eta) - A_h Z_h(t_\eta) + T_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq C_2 \left[\|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1,h} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (T_h Y_h(t_\eta) - T_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Da der zweite Summand die Bedingung (S) erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (T_h Y_h(t_\eta) - T_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \left(\Phi_h(t_\eta, Y_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \Phi_h(t_\eta, Z_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}}) \right) \right|^2 \right) \\
&\leq Lh \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

gilt. Somit bekommen wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \\
&\leq 2C_2 \left[\|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1, h}^2 + Lh \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Nach dem Lemma 4.1.3 und für alle Schrittweiten $h > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq j} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) &\leq 2C_2 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1, h}^2 e^{j2C_2 Lh} \\
&\leq 2C_2 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1, h}^2 e^{2C_2 LT}.
\end{aligned}$$

Daher haben wir gezeigt, dass es eine Konstante \tilde{C}_2 gibt, die unabhängig von h ist, so dass

$$\|Y_h - Z_h\|_{0, h} \leq \tilde{C}_2 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1, h}$$

für alle $Y_h, Z_h \in E_h$ gilt. Bei der weiteren Abschätzung wird A_h durch $L_h + T_h$ ersetzt. Wir wenden den linken Teil der Bistabilitätsungleichung (2.6) für L_h an und benutzen (4.5):

$$\begin{aligned}
& C_1 \|A_h Y_h - A_h Z_h\|_{-1, h} \\
&= C_1 \left[\|(Y(0) - Z(0))\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i (A_h Y_h(t_\eta) - A_h Z_h(t_\eta)) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \left[\|(Y(0) - Z(0))\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \left(L_h Y_h(t_\eta) - L_h Z_h(t_\eta) \right) - \left(T_h Y_h(t_\eta) - T_h Z_h(t_\eta) \right) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq C_1 \left[\|L_h Y_h - L_h Z_h\|_{-1,h} + \left(\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i T_h Y_h(t_\eta) - T_h Z_h(t_\eta) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq C_1 \left[\|L_h Y_h - L_h Z_h\|_{-1,h} + \left(Lh \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq C_1 \left(1 + \sqrt{LT} \right) \|Y_h - Z_h\|_{0,h}.
\end{aligned}$$

Folglich haben wir die Bistabilität der Operatoren $(A_h)_{h>0}$ bewiesen.

□

4.2 Bistabilität des Itô-Taylor-Verfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir überprüfen, ob die Bedingung (S) für das Itô-Taylor-Verfahren der Ordnung γ erfüllt ist. Es gilt für $Y_h, Z_h \in \mathcal{G}_h$ und $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \left(\Phi_h^{ITS}(t_\eta, Y_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \Phi_h^{ITS}(t_\eta, Z_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma}) \right) \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} [f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1}))] I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right) \\
&\leq |\mathcal{A}_\gamma| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i [f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1}))] I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Da $|\mathcal{A}_\gamma| < \infty$, können wir jeden Summanden separat abschätzen. Für alle Multi-Indizes $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ der Form $\alpha = (0, \dots, 0)$, d. h., $l(\alpha) = n(\alpha)$, haben wir $I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} = \frac{1}{l(\alpha)!} h^{l(\alpha)}$ (vgl. [10, Chap.5]). In diesem Fall wenden wir die Jensensche Ungleichung und die Bedingung $(A3)$ an und erhalten

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i [f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1}))] I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{T}{(l(\alpha)!)^2} h^{2l(\alpha)-1} \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{T}{(l(\alpha)!)^2} L_\alpha h^{2l(\alpha)-1} \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{T}{(l(\alpha)!)^2} L_\alpha h^{2l(\alpha)-1} \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} \left| Y_h(t_i) - Z_h(t_i) \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Für Multi-Indizes $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ mit $l(\alpha) \neq n(\alpha)$ folgt, dass $\mathbb{E}[I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} | \mathcal{F}_{t_{\eta-1}}] = 0$ gilt (vgl. [10, Lemma 5.7.1]), und eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\mathbb{E}[|I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta}|^2] \leq Ch^{l(\alpha)+n(\alpha)}$ (vgl. Lemma 3.2.2 im Abschnitt 3.2). Folglich ist unter diesen Bedingungen der stochastische Prozess $(S_i)_{i=0, \dots, N}$ mit

$$S_i := \sum_{\eta=1}^i \left(f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta}$$

ein diskretes Martingal. Wir wenden die Doob's-Martingal-Ungleichung (siehe Lemma 6.1.1 in Appendix) an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} |S_i|^2 \right) &\leq 4 \mathbb{E} \left(|S_j|^2 \right) \\
&= 4 \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| [f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1}))] I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right) \\
&\leq 4CL_\alpha \sum_{\eta=1}^j h^{l(\alpha)+n(\alpha)} \mathbb{E} \left(\left| Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \\
&\leq 4CL_\alpha h^{l(\alpha)+n(\alpha)} \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} \left| Y_h(t_i) - Z_h(t_i) \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Da $l(\alpha) + n(\alpha) \geq 1$ folgt, dass die Bedingung (S) für das Itô-Taylor-Verfahren der Ordnung γ erfüllt und nach dem Satz 4.1.2 dieses Verfahren bistabil ist.

□

4.3 Bistabilität des Balanced-Milstein-Verfahrens

Für den Beweis der Bistabilität des Balanced-Milstein-Verfahrens wollen wir die analogen Schritte wie im Abschnitt 4.2 durchführen. Wir beweisen die Bedingung (S) für BMM.

Es gilt für $Y_h, Z_h \in \mathcal{G}_h$ und $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \left[\Phi_h^{BMM}(t_\eta, Y_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}_1}) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \Phi_h^{BMM}(t_\eta, Z_h(t_{\eta-1}), (I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta})_{\alpha \in \mathcal{A}_1}) \right] \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i M_\eta^{-1} \left[\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right] \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i M_\eta^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \left(f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right) \\
&\leq |\mathcal{A}_1| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_1} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i M_\eta^{-1} \left(f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Da $|\mathcal{A}_1| < \infty$, schätzen wir diese Summanden separat ab. Für alle Multi-Indizes $\alpha \in \mathcal{A}_1$ mit $l(\alpha) = n(\alpha)$ gilt $I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta} = \frac{1}{l(\alpha)!} h^{l(\alpha)}$. Wir benutzen die Definition für die hierarchische Menge (3.4) und erhalten

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i M_\eta^{-1} \left[b^0(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - b^0(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right] I_{(0)}^{t_{\eta-1}, t_\eta} \right|^2 \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} i h^2 \sum_{\eta=1}^i \left| M_\eta^{-1} \right|^2 \left| b^0(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - b^0(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq K_M^2 T \sum_{\eta=1}^j h \mathbb{E} \left(\left| b^0(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - b^0(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right|^2 \right) \\
&\leq K_M^2 K^2 T h \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \\
&\leq L h \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} \left| Y_h(t_i) - Z_h(t_i) \right|^2 \right),
\end{aligned}$$

wobei die Konstante $L > 0$ nur von K_M, K und T abhängt. Es wurden die Jensensche Ungleichung und die Bedingungen (A2), (C3) angewendet. Für die Multi-Indizes $\alpha \in \mathcal{A}_1$ mit $l(\alpha) \neq n(\alpha)$ wenden wir das Lemma 3.3.3 an und definieren die Folge F_η durch

$$F_\eta =: M_\eta^{-1} \left(f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_\alpha^{t_{\eta-1}, t_\eta}, \quad \eta = 1, \dots, N.$$

Nach dem Lemma 3.3.3 gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i M_{\eta}^{-1} \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \right|^2 \right) \\
& \leq 32 \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| M_{\eta}^{-1} \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \right|^2 \right) \\
& + 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \mathbb{E} \left(M_{\eta}^{-1} \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \mid \mathcal{F}_{t_{\eta-1}} \right) \right|^2 \right) \\
& =: Q_1 + Q_2.
\end{aligned}$$

Wir schätzen diese Summe separat ab. Da $\mathbb{E}(|I_{\alpha}^{t_{\eta}}|^2) \leq Ch^{l(\alpha)+n(\alpha)}$ (vgl. Lemma 3.2.2) gilt, erhalten wir mit den Bedingungen (A3) und (C3)

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 32 \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| M_{\eta}^{-1} \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \right|^2 \right) \\
& \leq 32 \sum_{\eta=1}^j K_M^2 Ch^{l(\alpha)} \mathbb{E} \left(\left| f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right|^2 \right) \\
& \leq 32 K_M^2 L_{\alpha} Ch^{l(\alpha)} \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E} \left(\left| Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1}) \right|^2 \right) \\
& \leq Lh^{l(\alpha)} \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq i \leq \eta} |Y_h(t_i) - Z_h(t_i)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Hier ist die Konstante $L > 0$ von α , C und K_M abhängig. Weiter schätzen wir den zweiten Term ab. Es folgt

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \mathbb{E} \left(M_{\eta}^{-1} \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \mid \mathcal{F}_{t_{\eta-1}} \right) \right|^2 \right) \\
& \leq 2 \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{\eta=1}^i \mathbb{E} \left(M_{\eta}^{-1} I_{\alpha}^{t_{\eta-1}, t_{\eta}} \mid \mathcal{F}_{t_{\eta-1}} \right) \left(f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1})) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - f_{\alpha}(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1})) \right) \right|^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\mathbb{E}\left(\max_{1\leq i\leq j} i \sum_{\eta=1}^i \left|\mathbb{E}\left(M_\eta^{-1}I_\alpha^{t_{\eta-1},t_\eta}|\mathcal{F}_{t_{\eta-1}}\right)\right|^2 \left(f_\alpha(t_{\eta-1}, Y_h(t_{\eta-1}))\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- f_\alpha(t_{\eta-1}, Z_h(t_{\eta-1}))\right)\right|^2) \\
&\leq 2NL_\alpha^2 \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(M_\eta^{-1}I_\alpha^{t_{\eta-1},t_\eta}|\mathcal{F}_{t_{\eta-1}}\right)\right|^2 \left|Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1})\right|^2\right) \\
&\leq 2NL_\alpha^2 \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(M_\eta^{-1}I_\alpha^{t_{\eta-1},t_\eta}|\mathcal{F}_{t_{\eta-1}}\right)\right|^2\right) \mathbb{E}\left(\left|Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1})\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Weiter benutzen wir (3.26) und die Abschätzung (3.27) und erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(M_\eta^{-1}I_\alpha^{t_{\eta-1},t_\eta}|\mathcal{F}_{t_{\eta-1}}\right)\right|^2\right) \\
&\leq 2K_M^2 Ch^{2+l(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Anschließend setzen wir (4.6) in die obigen Ungleichung ein

$$\begin{aligned}
Q_2 &\leq 4NCK_M^2L_\alpha^2 \sum_{\eta=1}^j h^{2+l(\alpha)} \mathbb{E}\left(\left|Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1})\right|^2\right) \\
&\leq 4K_M^2L_\alpha^2CTh^{1+l(\alpha)} \sum_{\eta=1}^j \mathbb{E}\left(\left|Y_h(t_{\eta-1}) - Z_h(t_{\eta-1})\right|^2\right) \\
&\leq Lh^{1+l(\alpha)} \sum_{\eta=0}^{j-1} \mathbb{E}\left(\max_{0\leq i\leq \eta} \left|Y_h(t_i) - Z_h(t_i)\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Hier hängt die Konstante $L > 0$ von α, K_M, C und T ab. Da $l(\alpha) \geq 1$ ist, folgt die Erfüllung der Bedingung (S) für die Verfahrensfunktion Φ_h . Also, nach dem Satz 4.1.2 folgt die Bistabilität des Balanced-Milstein-Verfahrens.

□

Bemerkung 4.3.1. *Es ist nicht bekannt, ob man die Bistabilität des Balanced-Milstein-Verfahrens auch in der nicht durchmultiplizierten Form beweisen kann.*

5 Numerische Tests

5.1 Das Verhalten der numerischen Verfahren zur exakten Lösung

Anschließend betrachten wir einige numerische Beispiele, die die Notwendigkeit von der Konstruktion der balancierten Verfahren unterstreichen. Wir vergleichen die numerische Approximation von Standard Euler-Maruyama-Verfahren, Milstein-Verfahren, BIM und BMM. Im Folgenden betrachten wir eine nichtlineare stochastische Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned}dX(t) &= (\lambda X(t) - X^2(t))dt + \sigma X(t)dW(t), \\ X(0) &= X_0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

mit einem Standard-Wiener-Prozess $W(t)$, $t \geq 0$ und $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung ist als stochastische Verhulst Gleichung bekannt (vgl.[10, Chap.4]). Die exakte Lösung von (5.1) ist durch

$$X(t) = \frac{X_0 \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)}{1 + X_0 \int_0^t \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma W(s)\right) ds}\tag{5.2}$$

gegeben (siehe [10, Sec.4.4]).

Bemerkung 5.1.1. *Zur Auswertung (5.2) wurde in diesen Tests die Trapezsumme angewendet.*

Wir wenden das Euler-Maruyama-Verfahren auf die nichtlineare stochastische Gleichung (5.1) an und erhalten

$$Y_i = Y_{i-1} + (\lambda Y_{i-1} - Y_{i-1}^2)h + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N\tag{5.3}$$

Hier ist $h = \frac{T}{N}$, $N = 1, 2, \dots$, die Schrittweite und $\Delta W(t_{i-1}) = W(t_i) - W(t_{i-1})$ sind Wiener-Inkremente für alle $i = 1, \dots, N$. Das Anwenden des Milstein-Verfahrens auf (5.1)

ergibt

$$Y_i = Y_{i-1} + (\lambda Y_{i-1} - Y_{i-1}^2)h + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} ((\Delta W(t_{i-1}))^2 - h), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Zunächst geben wir eine allgemeine Form von dem balancierten impliziten Verfahren (BIM) (siehe [9, Sec.1])

$$Y_i = Y_{i-1} + \sum_{r=0}^m b^r(t_{i-1}, Y_{i-1}) I_{(r)}^{t_{i-1}, t_i} + \sum_{r=0}^m c^r |I_{(r)}^{t_{i-1}, t_i}| (Y_{i-1} - Y_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ mit den gegebenen Konstanten $c^r \in \mathbb{R}$. Wir wenden das BIM auf die Gleichung (5.1) an und bekommen

$$Y_i = Y_{i-1} + (\lambda Y_{i-1} - Y_{i-1}^2)h + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + (c_0 h + c_1 |\Delta W(t_{i-1})|) (Y_{i-1} - Y_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.6)$$

für $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Durch die Anwendung des balancierten Milsten-Verfahrens auf die Gleichung (5.1) bekommen wir

$$Y_i = Y_{i-1} + (\lambda Y_{i-1} - Y_{i-1}^2)h + \sigma Y_{i-1} \Delta W(t_{i-1}) + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_{i-1} ((\Delta W(t_{i-1}))^2 - h) + (d_0 h + \frac{1}{2} d_1 ((\Delta W(t_{i-1}))^2 - h)) (Y_{i-1} - Y_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.7)$$

mit den gegebenen Konstanten $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$.

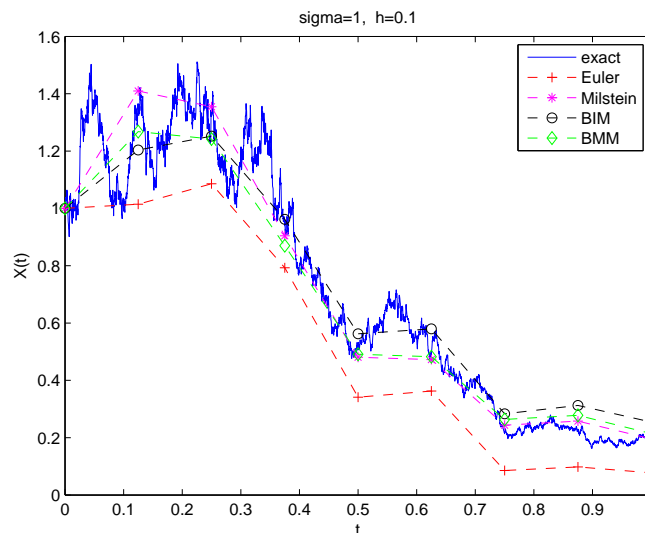


Abbildung 5.1: Das Verhalten der numerischen Verfahren zur exakten Lösung

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen ein unterschiedliches Verhalten dieser vier nume-

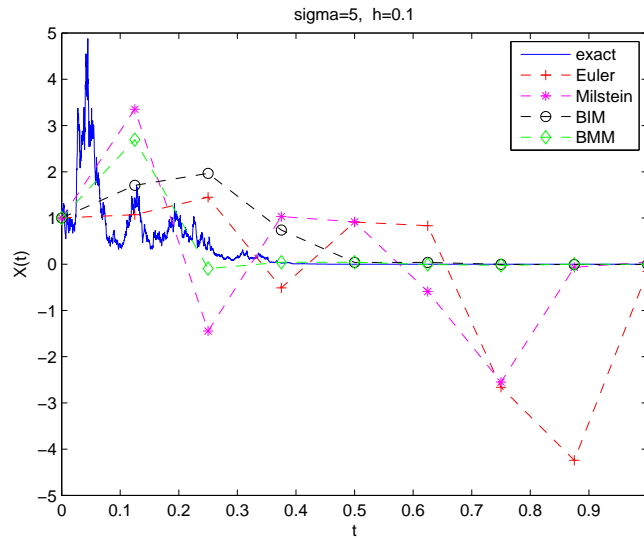


Abbildung 5.2: Das Verhalten der numerischen Verfahren zur exakten Lösung

rischen Verfahren für die Schrittweite $h = 0.1$, ein festes $\lambda = 1$, die Werte $c_0 = \sigma$, $c_1 = \frac{\sigma}{2}$, $d_0 = \frac{\sigma}{2}$, $d_1 = 2^{-5}\sigma$, zwei verschiedenen Parameter $\sigma = 1$ und $\sigma = 5$. Diese Implementation zur exakten Lösung wurde mit $N = 2^{12}$ Schritten im Zeitintervall $[0, 1]$ gemacht. In der Abbildung 5.2 sieht man, dass die balancierte Verfahren, sowohl BIM als auch BMM, trotz relativ großes σ mit den gegebenen Konstanten c_0, c_1, d_0 und d_1 sich ziemlich stabil verhalten. Dagegen das Euler-Maruyama-Verfahren und das Milstein-Verfahren werden durch diesen großen Parameter σ instabil.

5.2 Der starke Konvergenzfehler

Ein anderer wichtiger Aspekt in diesen Tests ist die starke Konvergenz von den numerischen Verfahren zu prüfen. Der starke Konvergenzfehler wird durch

$$\|X_h - r_h^E X\|_{0,h} \leq Ch^\gamma, \quad C > 0, \quad \gamma > 0,$$

definiert. Hier ist $r_h^E X$ die Restriktion der exakten Lösung X auf das Zeitgitter τ_h . Auf den Abbildungen 5.3 und 5.4 ist der starke Fehler $(\mathbb{E}(|X_h(T) - X(T)|^2))^{\frac{1}{2}}$ mit den verschiedenen Schrittweiten auf dem Zeitintervall $[0, 1]$ abgebildet. Die Schrittweite für die exakte Lösung ist durch $h = \frac{T}{N}$ für $N = 2^{12}$ gegeben. Die Anzahl der Simulationspfade $M = 50000$. Die Implementation wurde hier mit dem festen $\lambda = 1$ und den Konstanten $c_0 = \sigma$, $c_1 = \frac{\sigma}{2}$, $d_0 = \frac{\sigma}{2}$, $d_1 = 2^{-5}\sigma$ durchgeführt.

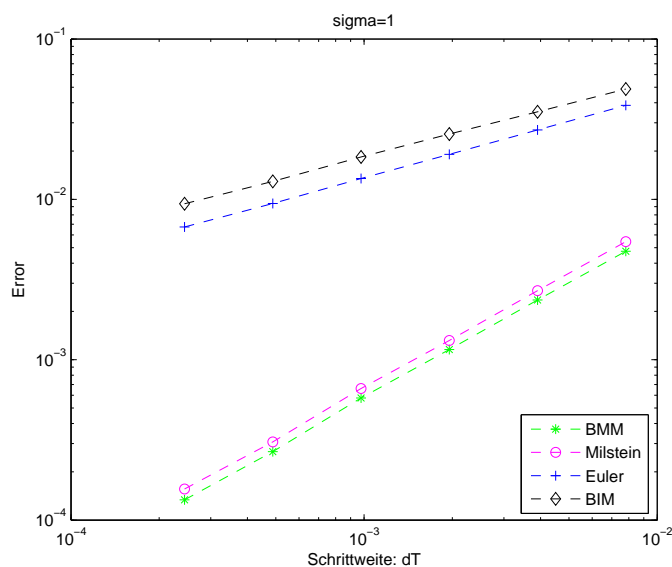


Abbildung 5.3: Starker Konvergenzfehler

In der Abbildung 5.3 ist zu sehen, dass für relativ kleines $\sigma = 1$ das Euler-Maruyama-Verfahren und BIM die Konvergenzordnung $\frac{1}{2}$ haben. Ebenfalls ist bei dem Milstein-Verfahren und dem Balanced-Milstein-Verfahren die Konvergenzordnung 1 sichtbar. Für den größeren Parameter $\sigma = 4.45$ verändert sich das Bild des Konvergenzfehlers. Da die Approximationen (5.3) und (5.4) für ein großes σ mit der groben Schrittweite nicht mehr gut geeignet sind, werden die Konvergenzordnungen bei diesen Verfahren zerstört. Man sieht es durch die fehlende, genauer gesagt nicht mitgezeichnete Punkte auf dem Bild 5.4. Die Tabelle 5.1 stellt für die Abbildung 5.4 die entsprechenden Konvergenzordnungen dar, die von der feinsten Schrittweite bis zu den größten entstanden sind.

Es ist offensichtlich, dass das Balanced-Milstein-Verfahren für relativ große Schrittweiten dT und großen Parameter σ eine der besten Approximationsmethoden ist, was die Abbildung 5.4 zeigt.

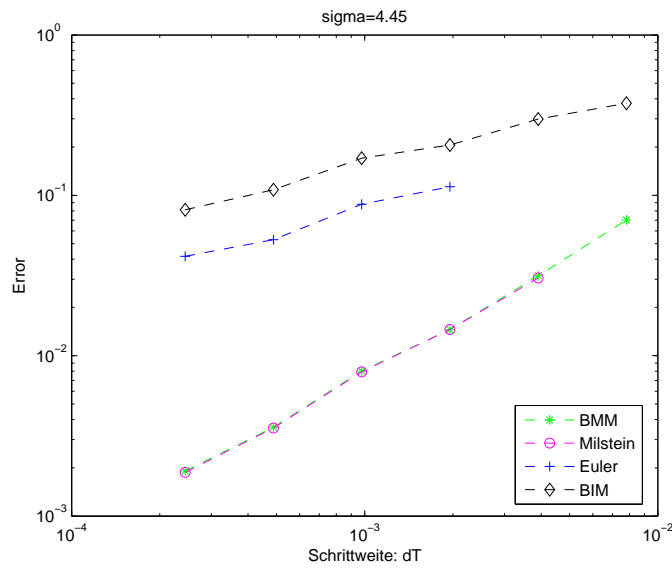


Abbildung 5.4: Starker Konvergenzfehler

Konvergenzordnung	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
Euler	0.34	0.53	0.50	<i>NaN</i>	<i>NaN</i>
Milstein	0.91	1.04	1.00	1.00	<i>NaN</i>
BIM	0.41	0.53	0.40	0.46	0.44
BMM	0.90	1.03	0.99	1.01	1.03

Tabelle 5.1: Die Konvergenzordnung mit den verschiedenen Schrittweiten

5.3 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die numerische balancierte Verfahren zu analysieren. In dem theoretischen Teil der Arbeit haben wir die drei wichtigen Aspekte wie Konsistenz, Bi-stabilität und Konvergenz untersucht. Aufgrund der numerischen Resultaten im Kapitel 5 kann man den Autoren aus [9] und [15] zustimmen, dass die balancierten numerischen Verfahren, beziehungsweise das Balanced-Milstein-Verfahren für grobe Schrittweite und relativ großes σ eine bessere Approximation zur exakten Lösung ermöglichen.

Anschließend stellt sich die Frage, ob das balancierte Milstein-Verfahren auch für die partiellen stochastischen Differentialgleichungen anwendbar ist.

6 Appendix

6.1 Hilfsmittel aus der stochastischen Analysis

Lemma 6.1.1. (Doob's-Martingal-Ungleichung) Sei X ein L^p -Martingal. Dann gilt für $1 \leq p < +\infty$, alle t und $\lambda \geq 0$

$$\lambda^p P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}(|X_t|^p).$$

Für $1 < p < +\infty$ ist Submartingal $(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|)_t$ in L^p enthalten. Dann gilt die L^p -Doob's-Ungleichung:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_t|^p).$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in [2].

Lemma 6.1.2. (Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung) Es sei X ein beschränkter vorhersagbarer Prozess und $t \in [0, T]$. Dann existieren für $0 < p < \infty$ die Konstanten c_p und C_p , so dass

$$c_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X^2(s) ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0, T]} \left|\int_0^t X(s) dW(s)\right|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X^2(s) ds\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

gilt.

Dieses Lemma ist mit Beweis in [3, Chap.12] gegeben.

Lemma 6.1.3. (*Jensensche Ungleichung*) Sei X eine integrierbare reelle Zufallsvariable auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{F}, P) mit den Werten in einem offenen Intervall $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Dann liegt der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ in \mathbb{I} . Für jede auf \mathbb{I} definierte konvexe Funktion q ist $q \circ X$ eine Zufallsvariable. Ist diese integrierbar, so gilt

$$q(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(q \circ X).$$

Insbesondere gilt für jedes $X \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathbb{E}(X)|^n \leq \mathbb{E}(|X|^n).$$

Den Beweis findet man in [2] und in [16, Lemma 12.3.11]. Um das nächste Lemma zu formulieren benötigen wir die folgende Definition:

Definition 6.1.4. Für $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$ mit $l \geq 2$ definieren wir durch \mathcal{H}_α die Menge aller adaptierten rechtsstetigen stochastischen Prozesse $f = \{f(t), t \geq 0\}$ mit linksseitigen Limits, so dass der Integralprozess $\{I_{\alpha-}[f(\cdot)]_s^t, t \geq 0\}$ erfüllt (vgl. [10, Sec.5])

$$I_{\alpha-}[f(\cdot)]_s \in \mathcal{H}_{(j_i)}, \quad s \leq t.$$

Lemma 6.1.5. Seien $\alpha \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{H}_\alpha$, $q = 1, 2, \dots$, und $s \leq t$ gegeben. Dann gilt für $s \leq t$

$$\left(\mathbb{E} \left(\left| I_{\alpha-}[g(\cdot)]_s^t \right|^{2q} \middle| \mathcal{F}_s \right) \right)^{\frac{1}{q}} \leq (2(2q-1)e^T)^{l(\alpha)-n(\alpha)} (t-s)^{l(\alpha)+n(\alpha)} \mathcal{R},$$

wobei $\mathcal{R} = \left(\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |g(t)|^{2q} \middle| \mathcal{F}_s \right) \right)^{\frac{1}{q}}$. Hier \mathcal{M} ist die Menge aller Multi-Indizes.

Dieses Lemma findet man mit dem Beweis in [10, Sec. 5.7].

Lemma 6.1.6. *Sei $\alpha \in \mathcal{M} \setminus \{\nu\}$ mit $l(\alpha) \neq n(\alpha)$ gegeben. Seien $s \leq t$ und $f \in \mathcal{H}_\alpha$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\left(I_\alpha[f(\cdot)]_s^t | \mathcal{F}_s\right) = 0.$$

Dieses Lemma ist in [10, Sec. 5.7] bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen: Theorie und Anwendung. R. Oldenbourg, München 1973
- [2] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. De Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- [3] Bass, R.: Stochastic Processes. Cambridge University, 2011.
- [4] Beyn, W.-J., Kruse, R.: Numerics of stochastic processes. Skript zur Vorlesung, Universität Bielefeld, 2011
- [5] Grigorieff, R.D.: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, vol. 2. Mehrschrittverfahren. Teubner Studienbücher: Mathematik, 1977
- [6] Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G.: Solving ordinary differential equations 1. Nonstiff problems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987, 1993.
- [7] Hairer, E., Wanner, G.: Solving ordinary differential equations 2. Stiff and differential-algebraic problems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1991, 1996
- [8] Kahl, C.: Positive numerical integration of stochastic differential equations. Diplomarbeit, Universität Wuppertal, Wuppertal, 2004.
- [9] Kahl, C., Schurz, H.: Balanced Milstein Methods for Ordinary SDEs. Monte Carlo Methods and Appl., Vol. 12, No. 2, pp.143-170 (2006)
- [10] Kloeden, P.E., Platen, E.: Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Applications of Mathematics, vol. 23. Springer-Verlag, Berlin, New-York (1992)
- [11] Kloeden, P.E.: Numerik stochastischer Differentialgleichungen. Skript zur Vorlesung, Johann Wolfgang Goethe Universität, April 2010
- [12] Kruse, R.: Characterization of bistability for stochastic multistep methods. BIT Numer. Math. 52,1:109-140 (2012)

- [13] Mao, X.: Stochastic Differential Equations and their Applications. Coll House, Westergate, Chichester, West Sussex, PO20 6QL England (1997)
- [14] Milstein, G. N.: Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer Academic Publishers, 1995
- [15] Milstein, G. N., Platen, E., Schurz, H.: Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. SIAM J.Numer. Anal., Vol. 35, No. 3, pp. 1010-1019, 1998
- [16] Schmidt, K.D.: Maß und Wahrscheinlichkeit. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009