Schulbesuch
Erich-Kästner Gesamtschule
07. April 2011
Bünde

Denny Otten
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
dotten@math.uni-bielefeld.de

Ein Lösungsverfahren für Sudoku-Rätsel

Denny Otten

Übersicht

- Was ist ein Sudoku-Rätsel?
- Die Regeln und das Ziel
- Zentrale Fragestellung
- Färbungsproblem
- Lösungsansatz
- Implementierung

Was ist ein Sudoku-Rätsel?

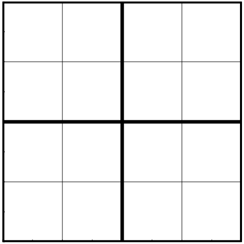

Figure: Sudoku-Rätsel (für $n = 2$)

- Es bezeichne $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, wobei

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

- Das Spiel besteht aus einem Gitterfeld mit $n \times n$ Blöcken, die jeweils in $n \times n$ Felder unterteilt sind (insgesamt $(n \cdot n)^2 = n^4$ Felder).

Die Regeln

1			
	2		
		1	2
			3

Figure: Startsetting (für $n = 2$)

- In einige dieser Felder sind zu Beginn Ziffern zwischen 1 und n^2 vorgegeben (meist sind etwa $27 - 44\%$ der Felder vorgegeben).

Das Ziel

1	3	2	4
4	2	3	1
3	4	1	2
2	1	4	3

Figure: Lösung (für $n = 2$)

- Ziel des Spiels ist es, die leeren Felder des Rätsels so zu vervollständigen, dass in jeder der n^2 Zeilen, Spalten und Blöcke jede Ziffer von 1 bis n^2 genau einmal auftritt.

Zentrale Fragestellung

- Gibt es einen mathematischen Ansatz, das Sudoku-Problem zu lösen? ($\rightarrow$ Färbungsproblem (Graphentheorie))
- Lässt sich dieser Ansatz durch einen Algorithmus umsetzen und am Computer lösen? ($\rightarrow$ z. B. Backtracking)

Herleitung des Färbungsproblems

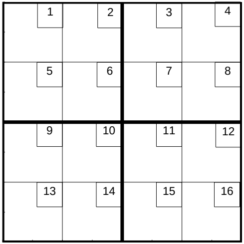

Figure: Sudoku (für $n = 2$)

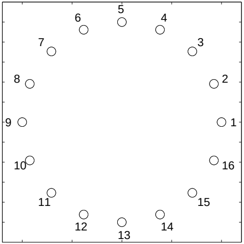

Figure: Färbungsgraph (für $n = 2$)

- Für jedes der n^4 Felder (linke Abb.) zeichnen wir genau einen Knoten (rechte Abb.).

Herleitung des Färbungsproblems

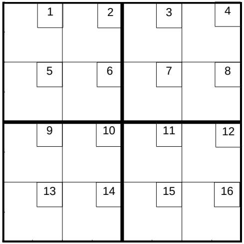

Figure: Sudoku (für $n = 2$)

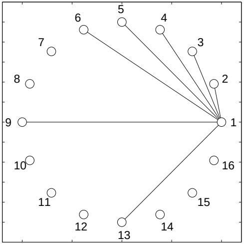

Figure: Färbungsgraph (für $n = 2$)

- Verbinde diejenigen Knoten miteinander, in deren Feldern nicht dieselben Zahlen auftreten dürfen.
- Die Verbindungen im Färbungsgraphen entsprechen den Regeln des Sudokus.

Färbungsproblem

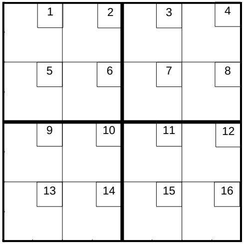

Figure: Sudoku (für $n = 2$)

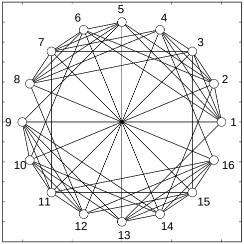

Figure: Färbungsgraph (für $n = 2$)

- Frage: Sind die n^4 Knoten des Graphen so mit n^2 Farben einfärbbar, dass alle Knoten, die direkt durch eine Kante miteinander verbunden sind, unterschiedliche Farben haben?
- Hinweis: Färbungsprobleme werden in der Graphentheorie behandelt.

Lösen des Färbungsproblems (Startsetting)

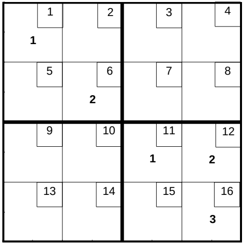

Figure: Sudoku (für $n = 2$)

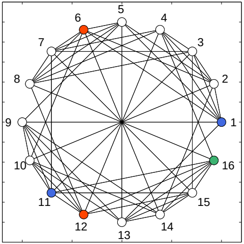

Figure: Färbungsgraph (für $n = 2$)

- Jede Zahl von 1 bis n^2 (linke Abb.) entspricht einer von insgesamt n^2 Farben (rechte Abb.)
- Färbe die Knoten des Färbungsgraphen entsprechend der Startvorgaben des Sudokus.

Lösen des Färbungsproblems (Lösung)

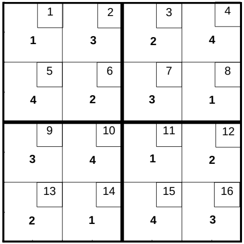

Figure: Sudoku (für $n = 2$)

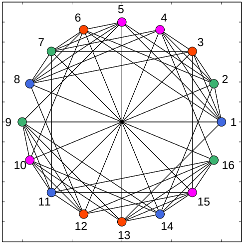

Figure: Färbungsgraph (für $n = 2$)

- In jeder der n^2 Zeilen, Spalten und Blöcke tritt jede Zahl von 1 bis n^2 genau einmal auf (linke Abb.).
- Alle Knoten, die direkt durch eine Kante miteinander verbunden sind, haben unterschiedliche Farben (rechte Abb.).

Lösungsansatz (Algorithmus)

1. Färbe die Knoten entsprechend der vorgegebenen Zahlen ein. (Startsetting)
2. Überprüfe, ob die Färbung die Regeln erfüllt.
3. Durchlaufe die noch nicht eingefärbten Knoten der Reihe nach von 1 bis n^4.
   3.1. Weise dem aktuellen Knoten der Reihe nach eine der n^2 Farben zu.
   3.2. Überprüfe, ob die Färbung die Regeln erfüllt.
      - Falls ja, gehe zu Schritt 3.
      - Falls nein, so überprüfe, ob bereits alle Farben durchlaufen wurden. Falls dies zutrifft, so gehe zum zuletzt geänderten Knoten und fahre bei Schritt 3 mit der nächsten Farbe fort. Andernfalls gehe zu Schritt 3.1.

- Suchmethode : Backtracking (Rücksetzverfahren)

Implementierung (die Adjazenzmatrix A)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

- A hat n^4 Zeilen und n^4 Spalten.
- i-te Zeile (bzw. j-te Spalte) steht für den i-te (bzw. j-ten) Knoten ($1 \leqslant i, j \leqslant n^4$).
- Sind die Knoten i und j durch eine gemeinsame Kante miteinander verbunden, so ist $A(i,j) = 1$ und $A(j,i) = 1$. Besitzen sie keine gemeinsame Kante, so ist $A(i,j) = 0$ und $A(j,i) = 0$ ($1 \leqslant i < j \leqslant n^4$).
- Die Farbe des i-ten Knotens tragen wir in $A(i,i)$ ein. Solange diese nicht bekannt ist, setzen wir $A(i,i) = 0$ ($i = 1, \ldots, n^4$).