ALGEBRA II
1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeige: Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:

(1) L ist ein algebraischer Abschluss von K.
(2) Jede endliche Erweiterung von K läßt sich K-isomorph in L einbetten (d.h. die Einbettung läßt die Elemente aus K fest).

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Fixiere $p \in \mathbb{N}$ prim. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $\mathbb{F}_p^{(n)}$ einen fest gewählten Körper mit p^n Elementen.

a) Für alle Paare $n \mid m \in \mathbb{N}$ kann man Monomorphismen $\varphi_{m,n} \colon \mathbb{F}_p^{(n)} \to \mathbb{F}_p^{(m)}$ wählen, so dass $\varphi_{n,n} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p^{(n)}}$ und $\varphi_{l,m} \circ \varphi_{m,n} = \varphi_{l,n}$ für alle $n \mid m \mid l \in \mathbb{N}$.

b) Betrachte auf der disjunkten Vereinigung $\widetilde{\mathbb{F}_p} = \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} \mathbb{F}_p^{(n)}$ die von folgender Relation erzeugte Äquivalenzrelation R

$$x_n \sim x_m \quad :\Longleftrightarrow \quad n \mid m \quad \text{und} \quad \varphi_{m,n}(x_n) = x_m, \quad \text{wobei} \quad x_n \in \mathbb{F}_p^{(n)},\ x_m \in \mathbb{F}_p^{(m)}.$$

Zeige, dass $\widetilde{\mathbb{F}_p}/R$ mit den Verknüpfungen

$$[x_n] + [x_m] := [\varphi_{nm,n}(x_n) + \varphi_{nm,m}(x_m)]$$
$$[x_n] \cdot [x_m] := [\varphi_{nm,n}(x_n) \cdot \varphi_{nm,m}(x_m)]$$

ein Körper ist, der ein algebraischer Abschluss von seinem Primkörper $\mathbb{F}_p$ ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass die Kardinalität von K und seinem algebraischen Abschluss übereinstimmen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ auf der Menge $\overline{K}$ operiert und dass jede Bahn bezüglich dieser Gruppenoperation endlich ist.

Abgabe: Donnerstag, 19. April 2018, bis 14 Uhr in das Postfach von Jan Geuenich im Raum V3-126.