

ALGEBRA II
2. ÜBUNGSBLATTHENNING KRAUSE
JAN GEUENICH**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Zeige: Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ läßt sich auf genau zwei Weisen anordnen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeige: Sei K ein geordneter Körper, so läßt sich der Körper der rationalen Funktionen $K(X)$ auch anordnen.

Hinweis: f/g ist positiv, falls das Produkt der Leitkoeffizienten von f und g positiv ist.

Aufgabe 3. (1+3 Punkte)

Sei K ein reell abgeschlossenen Körper.

- (1) Zeige, dass $X^2 + aX + b$ in $K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn $a^2 < 4b$.
- (2) Beweise für $f \in K[X]$ den Zwischenwertsatz: Sei $a < b$ und $f(a)f(b) < 0$, so existiert $a < c < b$ mit $f(c) = 0$.

Hinweis für (2): Ohne Einschränkung ist f normiert, und notiere dann f als Produkt irreduzibler Polynome (vom Grad 1 und 2).

Aufgabe 4. (3+1 Punkte)

Sei K ein reell abgeschlossenen Körper.

- (1) Beweise für Polynome $f \in K[X]$ den Satz von Rolle: Sei $a < b$ und $f(a) = f(b)$, so existiert $a < c < b$ mit $f'(c) = 0$.
- (2) Folgere aus (1) den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Polynome $f \in K[X]$.